Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 517.522.3+517.512.5

МАТЕМАТИКА

Л. В. ЖИЖИАШВИЛИ

О СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 25 II 1971)

1. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π и $f(x) \in L(-\pi, \pi)$. Как обычно, символом $\sigma[f]$ обозначаем ряд Фурье функции $f(x)$, а символом $\bar{\sigma}[f]$ — сопряженный тригонометрический ряд; $\bar{f}(x)$ означает сопряженную к $f(x)$ функцию. Затем, если $\delta > 0$, то через $\omega(\delta, f)_L$ будем обозначать интегральный модуль непрерывности функции $f(x)$.

Рассмотрим теперь функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, периодическую с периодом 2π относительно каждого переменного, и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(R)$, где $R = [-\pi, \pi; -\pi, \pi; \ldots; -\pi, \pi]$. Через $\sigma_n[f]$ мы обозначаем n-кратный ($n \geqslant 2$) тригонометрический (см. [1], стр. 156) ряд Фурье функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а символами $\bar{\sigma}_n[f, x_1], \ldots, \bar{\sigma}_n[f, x_n], \ldots, \bar{\sigma}_n[f, x_1, x_2], \ldots$ $\ldots, \bar{\sigma}_n[f, x_1, x_2], \ldots$, обозначаются n-кратные (см. [1], стр. 156) сопряженные тригонометрические ряды. С этими рядами тесно связаны сопряженные функции n переменных (см. [1], стр. 157) $\bar{f}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, \bar{f}_{1,2}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \bar{f}_{1,2,\ldots,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Количество n-кратных сопряженных тригонометрических рядов (или сопряженных функций n-переменных) $2^n - 1$. Если $\delta_i > 0$ $(i = 1 - n)$ и $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(R)$, то через $\omega(\delta_i, f)_L$ $(i = 1 - n)$ обозначаем частные интегральные модули непрерывности функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Затем, так как в случае n-кратных рядов можно рассматривать разные виды сходимости, то, для ясности, мы ограничимся сходимостью по Прингсгейму и λ-сходимостью.

2. Хорошо известно (см. [2], стр. 406—412, см. и [3]), что существует 2π-периодическая суммируемая функция $f(x)$ с суммируемым $\bar{f}(x)$, ряд Фурье которого расходится почти всюду. Обобщая в определенном смысле результат А. Н. Колмогорова [4] (см. [2], стр. 412—421), В. И. Прохоренко [5] показал, что существует $f(x) \in L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$ при всех $\varepsilon \in (0,1]$, ряд Фурье которого расходится почти всюду. Даже больше, В. И. Прохоренко [5] установил, что интегральный модуль непрерывности построенной функции удовлетворяет соотношению $\omega(\delta, f) = O\{(\log\log 1/\delta)^{-1}\}$ $(\delta \to 0)$. К. Тандори [6] показал, что существует $f(x)$, для которого при любом $\varepsilon \in (0, 1]$ $f(x) \in L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$, $\bar{f}(x) \in L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$, однако $\sigma[f]$ расходится всюду. Утверждение К. Тандори в определенном смысле усиливает результат В. И. Прохоренко, ибо и $\bar{f}(x) \in L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$ при всех $\varepsilon \in (0, 1]$, а $\sigma[f]$ расходится всюду. Но неизвестно, какой порядок имеет интегральный модуль непрерывности функции, построенной К. Тандори. Поэтому приведенное утверждение К. Тандори нельзя считать полным обобщением результата В. И. Прохоренко.

Затем, известно (см. [7], стр. 258), что если $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ и

$$\omega(\delta, f) = O\{(\log 1/\delta)^{-1-\varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0 \quad (\delta \to 0), \tag{1}$$

то ряд $\sigma[f]$ сходится почти всюду. Гарантирует ли условие (1) с $\varepsilon = 0$ сходимость ряда $\sigma[f]$ почти всюду (задача А. Зигмунда), неизвестно.

С другой стороны, (см. [8-10]) условие $f(x) \in L \log^+ L \log^+ \log^+ L$ обеспечивает сходимость ряда $\sigma[f]$ почти всюду.

Относительно сходимости ряда $\sigma[f]$ в смысле метрики $L(-\pi, \pi)$ в заметке ([11]) нами были приведены утверждения, которые, в определенном смысле, являются окончательными.

Что касается расходимости n-кратных тригонометрических рядов Фурье, то в этом направлении очень мало известно. Конечно, примеры А. Н. Колмогорова ([4]), В. И. Прохоренко ([5]) и К. Тандори ([6]) являются тривиальными примерами для кратных тригонометрических рядов Фурье. Но эти примеры не характеризуют кратные ряды Фурье, не связаны размерностью. Относительно достаточных условий, гарантирующих сходимость ряда $\sigma_n[f]$ почти всюду или в смысле метрики $L(R)$, тоже мало известно. Даже если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, то $\sigma_n[f]$ сходится или нет почти всюду, неизвестно.

Мы приведем утверждения, которые дают ответы на некоторые вопросы, поставленные выше.

Теорема 1. *Существует такая функция* $f_0(x) \in L(-\pi, \pi)$, *что*

а) $\omega(\delta, f_0) = O\{(\log\log 1/\delta)^{-1}\}$, $\omega(\delta, \bar{f}_0) = O\{(\log\log 1/\delta)^{-1}\}$ $(\delta \to 0)$;

б) *ряд* $\sigma[f_0]$ *расходится почти всюду.*

Используя результаты П. Л. Ульянова ([12]), согласно теореме 1, получаем

Следствие 1. *Существует такая функция* $f_0(x) \in L(-\pi, \pi)$, *что* $(f_0, \bar{f}_0) \in L(\log^+\log^+ L)^{1-\varepsilon}$ *при всех* $\varepsilon \in (0, 1]$, *однако ряд* $\sigma[f_0]$ *расходится почти всюду.*

Теорема 2. а) *Если* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(R)$ *и*

$$\omega(\delta_i, f)_L = O\{(\log 1/\delta_i)^{-n-\varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0 \ (\delta_i \to 0), \ i = 1 - n, \tag{2}$$

то ряд $\sigma_n[f]$ *и все сопряженные тригонометрические ряды сходятся почти всюду.*

б) *Существует функция* $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(R)$ *такая, что*

$$\omega(\delta_i, f_0)_L = O\{(\log\log 1/\delta_i)^{-n}\} \ (\delta_i \to 0), \ i = 1 - n, \tag{3}$$

все сопряженные функции для $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *тоже имеют интегральные модули непрерывности порядка* (3), *но все ряды* $\sigma_n[f_0]$, $\bar{\sigma}_n[f_0, x_1], \ldots, \bar{\sigma}_n[f_0, x_n], \ldots, \bar{\sigma}_n[f_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ λ*-расходятся (даже при* $\lambda = 1$*) почти всюду.*

На основании теоремы 2 получается

Следствие 2. *Существует функция* $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(\log^+\log^+ L)^{n-\varepsilon}$ *при всех* $\varepsilon \in (0, n]$, *для которой все сопряженные функции также принадлежат классу* $L(\log^+\log^+ L)^{n-\varepsilon}$, *однако все ряды* $\sigma_n[f_0]$, $\bar{\sigma}_n[f_0, x_1], \ldots, \bar{\sigma}_n[f_0, x_n], \ldots, \bar{\sigma}_n[f_0, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ λ*-расходятся почти всюду.*

Отметим, что из расходимости почти всюду ряда $\sigma_n[f]$, вообще говоря, не вытекает расходимость n-кратных сопряженных тригонометрических рядов.

Теорема 3. а) *Если* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(R)$ *и*

$$\omega(\delta_i, f)_L = O\{(\log 1/\delta_i)^{-n-\varepsilon}\}, \quad \varepsilon > 0 \quad (\delta_i \to 0), \quad i = 1 - n,$$

то ряд $\sigma_n[f]$ *и все сопряженные тригонометрические ряды сходятся в смысле метрики* $L(R)$.

б) *Существует функция* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(R)$ *такая, что*

$$\omega(\delta_i, f_1)_L = O\{(\log 1/\delta_i)^{-n}\} \quad (\delta_i \to 0), \quad i = 1 - n, \tag{4}$$

все сопряженные функции для $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *тоже имеют интегральные модули непрерывности порядка* (4), *однако ряды* $\sigma_n[f_1]$, $\bar{\sigma}_n[f_1, x_1], \ldots, \bar{\sigma}_n[f_1, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ λ*-расходятся в смысле метрики* $L(R)$.

Теорема 4. а) *Если* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(\log^+ L)^n$, *то все ряды* $\sigma_n[f]$, $\bar{\sigma}_n[f, x_1], \ldots, \bar{\sigma}_n[f, x_n], \ldots, \bar{\sigma}_n[f, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ *сходятся в смысле метрики* $L(R)$.

б) *Существует функция* $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L(\log^+ L)^{n-\varepsilon}$ *при всех* $\varepsilon \in (0, n]$ *такая, что все сопряженные функции тоже принадлежат к классу* $L(\log^+ L)^{n-\varepsilon}$, *однако ряды* $\sigma_n[f_1]$, $\bar{\sigma}_n[f_1, x_1], \ldots, \bar{\sigma}_n[f_1, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ λ-*расходятся в смысле метрики* $L(R)$.

Тбилисский государственный университет

Поступило 13 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Жижиашвили, Сопряженные функции и тригонометрические ряды, Тбилиси, 1969. [2] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. [3] G. Sunouchi, Kodai Math. sem. Rep. 1 (27) (1953). [4] А. Н. Колмогоров, C. R., 183, 1327 (1926). [5] В. И. Прохоренко, Матем. сборн., 75 (117), 2, 185 (1968). [6] K. Tandori, Acta sci. math., 30, 43 (1969). [7] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, М., 1965. [8] L. Carleson, Acta Math., 116, 135 (1966). [9] R. A. Hunt, Am. Math. Soc., 14, 537 (1967). [10] P. Sjölin, Ark. mat., 7, 551 (1969). [11] Л. В. Жижиашвили, ДАН, 194, 758 (1970). [12] П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 649 (1968).