Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 517.955.35

МАТЕМАТИКА

А. Д. ИСКЕНДЕРОВ

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 16 II 1971)

Под нагруженным дифференциальным уравнением будем понимать дифференциальное уравнение, в которое входят также значения искомой функции и ее производных, взятые в фиксированных точках области. В этой заметке устанавливается существование, единственность и устойчивость решения смешанной задачи для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа. Ниже укажем, что к нагруженным дифференциальным уравнениям приводят некоторые обратные задачи.

1°. Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область n-мерного эвклидова пространства с достаточно гладкой границей Γ, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная точка области $\mathscr{D}$, ξ_r $(r=1, 2, \ldots, \bar{r})$ — фиксированные точки области $\overline{\mathscr{D}}=\mathscr{D}\cup\Gamma$, $\Omega=\mathscr{D}\times[0, T]$. Ниже всюду под повторяющимися индексами подразумевается суммирование.

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_{tt}+Au=f(x, t, u, u_x, u_t, q(t)), \quad x\in\mathscr{D}, \quad 0\leqslant t\leqslant T; \tag{1}$$

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad x\in\overline{\mathscr{D}}; \tag{2}$$

$$u(x, t)|_\Gamma=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

где $Au=-(a_{kl}(x)u_{x_k})_{x_l}+a(x)u$, $u_x=\{u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}\}$, $q(t)=\{q_{rk}(t)$: $q_{r0}(t)=u(\xi_r, t)$, $r=1, 2, \ldots, r_0$; $q_{r1}(t)=u_{x_1}(\xi_r, t)$, $r=r_0+1, \ldots, r_1$; ... ...; $q_{rn}(t)=u_{x_n}(\xi_r, t)$, $r=r_{n-1}+1, \ldots, r_n$; $q_{rn+1}(t)=u_t(\xi_r, t)$, $r=r_n+$ $+1, \ldots, r_{n+1}\}$.

Предположим, что существует такое постоянное число $\mu>0$, что для произвольного n-мерного вектора $\gamma=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ при всех $x\in\overline{\mathscr{D}}$ выполняется неравенство

$$a_{kl}(x)\gamma_k\gamma_l\geqslant\mu|\gamma|^2.$$

Решением задачи (1)—(3) назовем такую функцию $u(x,t)$, которая дважды непрерывно дифференцируема в замкнутом цилиндре $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет всем условиям смешанной задачи (1) — (3) в обычном смысле.

Задача (1) — (3) без зависимости правой части уравнения (1) от $q(+)$ ранее исследовалась разными авторами при различных предположениях и вариантах. Однако к задачам типа (1)—(3) с зависимостью правой части уравнения (1) от $q(t)$ приводят некоторые обратные задачи об определении коэффициентов и решения уравнения по дополнительным данным лишними в случае, когда коэффициенты известны. Действительно, пусть требуется найти $\{u(x, t), b_m(t), m=1, 2, \ldots, m_0\}$ из условий

$$u_{tt}+Au=\mathscr{H}(x, t, u, u_x, u_t, b_m(t)), \quad x\in\mathscr{D}, 0\leqslant t\leqslant T; \tag{4}$$

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad x\in\overline{\mathscr{D}}; \tag{5}$$

$$u(x, t)|_\Gamma=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{6}$$

$$F_\rho(t, b_m(t), q(t))=0, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad \rho=1, 2, \ldots, r_{n+1}, \tag{7}$$

где $r_{n+1}=m_0$, функции $\mathscr{H}(x, t, u, v, \omega, q)$ и $F_\rho(t, b, q)$, $\rho=1, 2, \ldots, r_{n+1}$, определены соответственно в областях $\overline{\Pi}_1=\{(x, t)\in\overline{\Omega},\ |u|,\ |v|,\ |\omega|,\ |b|\leqslant M\}$, $\overline{\Pi}_2=\{t\in[0, T],\ |b|,\ |q|\leqslant M\}$, где M — некоторое положительное число.

Если предположить, что якобиан системы (7) относительно $b_m(t)$ отличен от нуля, то из (7) можно определить

$$b_m(t)=\beta_m(t, q(t)),\quad m=1, 2, \ldots, m_0. \tag{8}$$

Подставив выражение $b_m(t)$ из (8) в уравнение (4), для нахождения $u(x, t)$ получим задачу (1)—(3).

Ометим, что интересные результаты по обратным задачам для гиперболических уравнений получены в работах М. М. Лаврентьева, В. Г. Романова и др. (см. ([1], [2]) и библиографию в этих монографиях).

2°. Переходим к изложению основных результатов. Обозначим через $\mathring{W}_2^1(\mathscr{D})$ подпространство функций из $W_2^1(\mathscr{D})$, на границе области $\mathscr{D}$ обращающееся в нуль. Таким же образом, через $\mathring{W}_{x,t,2}^{1,1}(\Omega)$ обозначим подпространство функций из $W_{x,t,2}^{1,1}(\Omega)$, обращающееся в нуль на границе области Ω.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $a_{kl}(x)\in W_2^{([n/2]+2)}(\overline{\mathscr{D}})$, $k, l=1, 2, \ldots, n$; $a(x)\in W_2^{([n/2]+1)}(\overline{\mathscr{D}})$;

2) $\varphi(x)\in W_2^{([n/2]+3)}(\overline{\mathscr{D}})$, $\psi(x)\in W_2^{([n/2]+2)}(\overline{\mathscr{D}})$ *и кроме этого функции* φ, $A\varphi, \ldots, A^{[(n+4)/4]}\varphi$, ψ, $A\psi, \ldots, A^{[(n+2)/4]}\psi$ *принадлежат классу* $\mathring{W}_2^1(\overline{\mathscr{D}})$;

3) $f(x, t, u, v, \omega, q)$ *при* $(x, t)\in\overline{\Omega}$, $-\infty<u, v, \omega, q<\infty$ *по совокупности переменных непрерывна, имеет непрерывные производные до второго порядка, и функции* f, $Af, \ldots, A^{[(n+2)/4]}f$ *принадлежат классу* $\mathring{W}_{x,t,2}^{1,1}(\Omega)$. *Кроме этого,* $f(x, t, u, v, \omega, q)=\lambda f_1(x, t, u, v, \omega, q)+f_2(x, t, u, v, \omega, q)$, *где* $\lambda>0$ — *числовой параметр, а функции* $f_1(x, t, u, v, \omega, q)$, $f_2(x, t, u, v, \omega, q)$ *удовлетворяют одному из следующих условий:*

а) *производные функций* f_1, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}f_1$, $k=1, 2, \ldots, n$; $\dfrac{\partial}{\partial t}f_1$ *по* u, v, ω, q, *при* $(x, t)\in\Omega$, $-\infty<u, v, \omega, q<\infty$ *ограничены и* $f_1(x, t, 0, 0, 0, 0)\equiv 0$ *при всех* $(x, t)\in\overline{\Omega}$, *кроме этого,* f_2 *и его первые производные по совокупности переменных относительно* u, v, ω, q *растут не быстрее, чем* $M_1+M_2[|u|^\alpha+|v|^\alpha+|\omega|^\alpha+|q|^\alpha]$, *где* M_1, M_2 — *некоторые положительные числа,* $0<\alpha<1$;

б) $f_2(x, t, u, v, \omega, q)\equiv 0$ *при всех* $(x, t)\in\overline{\Omega}$, $-\infty<u, v, \omega, q<\infty$ *а* $f_1(x, t, u, v, \omega, q)$ *и ее производные по совокупности переменных до второго порядка в области* $\overline{\Pi}=\{(x, t)\in\overline{\Omega},\ |u|, |v|, |\omega|, |q|\leqslant M\}$ *ограничены неотрицательной неубывающей функцией* $F(M)$, *которая определена для всех* $M>0$ *и имеет конечные значения при всех конечных* M.

Тогда можно указать число λ_0, *что при* $0<\lambda<\lambda_0$ *задача* (1)—(3) *будет иметь хотя бы одно решение.*

Если при выполнении условия а) *окажется* $f_2(x, t, u, v, \omega, q)\equiv 0$ *при всех* $(x, t)\in\overline{\Omega}$, $-\infty<u, v, \omega, q<\infty$, *то это решение будет единственным, устойчивым и может быть найдено методом последовательных приближений.*

Доказательство теоремы опирается на установление существования решения операторного уравнения

$$w(x, t)=f\left(x, t, Bw(x, t), \frac{\partial}{\partial x}Bw(x, t), \frac{\partial}{\partial t}Bw(x, t), P(t)\right), \tag{9}$$

где

$$Bw(x, t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v_i(x)}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^t\int_{\mathscr{D}}v_i(\eta)\sin\sqrt{\lambda_i}(t-\theta)\,w(\eta, \theta)\,d\eta\,d\theta; \tag{10}$$

$$Av_i(x) = \lambda_i v_i(x), \quad x \in \mathscr{D}; \tag{11}$$

$$v_i(x)\,|_\Gamma = 0 \tag{12}$$

и $P(t) = \{P_{rk}(t)\colon\ P_{r0}(t) = Bw\,|_{x=\xi_r},\ r = 1, 2, \ldots, r_0;\ P_{r1}(t) = \frac{\partial}{\partial x_1} Bw\,|_{x=\xi_r},$

$$r = r_0 + 1, \ldots, r_1;\ P_{rn}(t) = \frac{\partial}{\partial x_n} Bw\,|_{x=\xi_r},\ r = r_{n-1} + 1, \ldots, r_n;$$

$$P_{rn+1}(t) = \frac{\partial}{\partial t} Bw\,|_{x=\xi_r},\quad r = r_n + 1, \ldots, r_{n+1}\Big\}.$$

После доказательства существования решения уравнения (9), используя результаты ([3], [4]) устанавливается справедливость утверждения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть решение задачи* (1) — (3) *существует и коэффициенты оператора* A *такие, что задача* (11), (12) *имеет полную систему ортонормированных собственных функций. Кроме этого, пусть* $n = 1$, $f(x, t, u, v, \omega, q)$ *при* $-\infty < u, v, \omega, q < \infty$ *принадлежит* $L_2(\Omega)$ *и выполнена оценка*

$|f(x, t, u, v, \omega, q) - f(x, t, u_1, v_1, \omega_1, q_1)|^2 \leqslant \text{const}\,[\,|u - u_1|^2 + |v - v_1|^2 + |\omega - \omega_1|^2 + |q - q_1|^2].$

Тогда решение задачи (1) — (3) *единственно.*

В заключение отметим, что условия гладкости на данные задачи (1)—(3) в теореме 1 в ряде случаев могут быть значительно ослаблены. Полученные результаты для задачи (1)—(3) распространяются на случай нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа, когда A является эллиптическим оператором $2m$-го порядка, и на соответствующие уравнения параболического и эллиптического типа.

Автор выражает глубокую благодарность М. М. Лаврентьеву за обсуждение полученных результатов.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
29 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, В. Г. Романов, Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений, Новосибирск, 1969. [2] В. Г. Романов, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, 1969. [3] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953. [4] В. А. Ильин, УМН, 15, 2 (93), 97 (1960).