Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 517.917 МАТЕМАТИКА

Ю. С. КОЛЕСОВ, В. Ф. ЧАПЛЫГИН

О НЕОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 23 X 1970)

В заметке рассматривается вопрос о неосцилляции на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ решений уравнения

$$\varepsilon\, d^2x\,/\,dt^2 + p(t)\, dx\,/\,dt + q(t)x = 0 \tag{1}$$

с малым положительным параметром ε. Предполагается, что функция $p(t)$ непрерывно дифференцируема, а функция $q(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$.

Если на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция $p(t)$ не имеет нулей, то легко показать, что при достаточно малых ε решения уравнения (1) не осциллируют на этом отрезке. Задача усложняется, если функция $p(t)$ в некоторых точках отрезка $[\alpha, \beta]$ обращается в нуль. Ниже рассматривается случай, когда функция $p(t)$ имеет конечное число простых нулей $t_1, \ldots, t_n$, принадлежащих интервалу (α, β).

Положим

$$\mu_0 = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left[q(t_i) - \frac{|\dot p(t_i)| + \dot p(t_i)}{2}\right].$$

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решения уравнения* (1) *не осциллируют на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *если* $\mu_0 < 0$, *и осциллируют, если* $\mu_0 > 0$.

Докажем сначала теорему для частного случая, когда $\alpha < 0 < \beta$ и нулевая точка является единственным нулем функции $p(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Пусть $\mu_0 > 0$. Установим существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ уравнение (1) имеет нетривиальное решение, у которого не менее двух нулей на (α, β).

При помощи замены

$$x = y\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_\alpha^t p(s)\,ds\right)$$

уравнение (1) преобразуется в уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{2q(t) - \dot p(t)}{2\varepsilon} - \frac{p^2(t)}{4\varepsilon^2}\right]y = 0,$$

которое запишем в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{2q(0) - \dot p(0) + \omega_1(t)}{2\varepsilon} - \frac{\dot p^2(0)\,t^2 + \omega_2(t)\,t^2}{4\varepsilon^2}\right]y = 0, \tag{2}$$

где непрерывные функции $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ удовлетворяют условию $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$. Полагая затем $t = \sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}\tau$, перейдем от уравнения (2) к уравнению

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \left[\frac{2q(0) - \dot p(0)}{2|\dot p(0)|} - {}^1/_4\tau^2 + \omega(\tau;\varepsilon)\right]y = 0, \tag{3}$$

где

$$\omega(\tau;\varepsilon) = \frac{\omega_1(\sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}\,\tau)}{2|\dot p(0)|} - \frac{\tau^2\omega_2(\sqrt{\varepsilon|\dot p(0)|^{-1}}\,\tau)}{4|\dot p(0)|^2}.$$

Естественно ожидать, что поведение решений уравнения (3) тесно связано с поведением решений более простого уравнения

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \left[\frac{2q(0) - \dot{p}(0)}{2|\dot{p}(0)|} - {}^1/_4\tau^2\right] y = 0, \tag{4}$$

которое заменой

$$y = u \exp(-{}^1/_4\tau^2)$$

преобразуется в хорошо изученное уравнение Вебера ([1, 2])

$$d^2u / d\tau^2 - \tau\, du / d\tau - au = 0, \tag{5}$$

где $a = {}^1/_2 - [2q(0) - \dot{p}(0)] / (2|\dot{p}(0)|)$.

Функция

$$u_a(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(a+2)\ldots(a+2i-2)}{(2i)!}\tau^{2i}$$

является решением уравнения (5). Используя теорему сравнения Штурма и неравенство $a < 0$, просто показать, что $u_a(\tau_0) = u_a(-\tau_0) = 0$ для некоторого $\tau_0 > 0$. Фиксируем теперь произвольно число $\tau_1 > \tau_0$ и рассмотрим отрезок $[-\tau_1, \tau_1]$. Далее, будем рассматривать только те значения ε, при которых отрезок $[-\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\tau_1, \sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\tau_1]$ принадлежит интервалу (α, β). Тогда на отрезке $[-\tau_1, \tau_1]$ определены коэффициенты уравнения (3), которые на этом отрезке равномерно сходятся к коэффициентам уравнения (4) при стремлении ε к нулю. Отсюда и следует требуемый результат.

Пусть теперь $\mu_0 < 0$. В этом случае для доказательства утверждения теоремы воспользуемся вариантом известного критерия неосцилляции Валле-Пуссена ([3, 4]).

Установим существование такой непрерывной на отрезке

$$\Delta(\alpha, \beta; \varepsilon) = [\alpha\sqrt{\varepsilon^{-1}|\dot{p}(0)|}, \beta\sqrt{\varepsilon^{-1}|\dot{p}(0)|}]$$

функции $z_0(\tau, \varepsilon)$ и такого положительного числа ε_0, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\tau \in \Delta(\alpha, \beta; \varepsilon)$ выполнено дифференциальное неравенство

$$D^* z_0(\tau; \varepsilon) \geqslant z_0^2(\tau; \varepsilon) + \frac{2q(\tau; \varepsilon) - 2(\tau; \varepsilon)}{2|\dot{p}(0)|} - \frac{p^2(\tau; \varepsilon)}{4\varepsilon|\dot{p}(0)|}, \tag{6}$$

где $q(\tau; \varepsilon) = q(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\tau)$, $p(\tau; \varepsilon) = p(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\tau)$, $r(\tau; \varepsilon) = \dot{p}(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\tau)$, а $D^* z_0(\tau; \varepsilon)$ — правое верхнее производное число функции $z_0(\tau; \varepsilon)$.

Введем в рассмотрение функцию

$$u_b(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(b+2)\ldots(b+2i-2)}{(2i)!}\tau^{2i},$$

где b — некоторое положительное число. При всех $\tau \in (-\infty, \infty)$ эта функция положительна. Поэтому на всей оси определена функция

$$v_b(\tau) = \tau / 2 - u_b^{-1}(\tau)\, du_b(\tau) / d\tau.$$

Очевидно,

$$u_b(\tau)\, v_b(\tau) = \tau\left[{}^1/_2 - b + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(b+2)\ldots(b+2i-2)}{(2i)!}\left({}^1/_2 - \frac{2i+b}{2i+1}\right)\tau^{2i}\right]. \tag{7}$$

Из формулы (7) вытекает, что функция $v_b(\tau)$ при каждом $0 < b < {}^1/_2$ имеет единственный положительный нуль $\tau(b)$, причем

$$\lim_{b \to 0} \tau(b) = \infty. \tag{8}$$

Отметим еще, что

$$d^2u_b(\tau) / d\tau^2 - \tau du_b(\tau) / d\tau - bu_b(\tau) = 0.$$

Поэтому из определения функции $v_b(\tau)$ следует равенство

$$dv_b(\tau) / d\tau = v_b^2(\tau) + {}^1/_2 - b - {}^1/_4\tau^2, \tag{9}$$

которое будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях.

Перейдем теперь непосредственно к построению функции $z_0(\tau; \varepsilon)$. Фиксируем такое положительное δ_0, чтобы отрезок $[-\delta_0, \delta_0]$ принадлежал интервалу (α, β) и чтобы

$$m_0 = \min |\dot{p}(t)| > 0 \quad (-\delta_0 \leqslant t \leqslant \delta_0).$$

Далее, фиксируем некоторое положительное число l_0, удовлетворяющее неравенству

$$l_0 \geqslant \max [4q(t) - 2\dot{p}(t)] \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

и положим

$$k_0 = m_0^{-1}\sqrt{l_0|\dot{p}(0)|}.$$

Из свойств функции $v_b(\tau)$ вытекает существование такого положительного числа $b < \min({}^1/_2, a)$ и такой постоянной $k \geqslant k_0$, что $\tau(b) = k$. Теперь функцию $z_0(\tau; \varepsilon)$ положим равной $v_b(\tau)$ при $|\tau| \leqslant k$ и равной тождественно нулю при остальных значениях $\tau \in \Delta(\alpha, \beta; \varepsilon)$.

Покажем, что построенная таким образом функция $z_0(\tau; \varepsilon)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству (6).

В силу (9) неравенство (6) будет выполнено при $|\tau| \leqslant k$, если

$$a - b \geqslant \max \omega(\tau; \varepsilon) \quad (|\tau| \leqslant k). \tag{10}$$

В неравенстве (10) правая часть стремится к нулю и поэтому оно заведомо будет выполнено для достаточно малых значений ε. При

$$k \leqslant |\tau| \leqslant \delta_0\sqrt{\varepsilon^{-1}|\dot{p}(0)|}$$

неравенство (6) будет выполнено, если при этих значениях τ будет выполнено неравенство

$$|p(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\tau)| \geqslant \sqrt{l_0\varepsilon},$$

которое, используя формулу Лагранжа, запишем в виде

$$|\dot{p}(\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}\theta\tau)|\sqrt{\varepsilon|\dot{p}(0)|^{-1}}|\tau| \geqslant \sqrt{l_0\varepsilon}, \tag{11}$$

где $\theta \in (0, 1)$. Неравенство (11) является следствием более грубого неравенства

$$m_0 k \geqslant \sqrt{l_0|\dot{p}(0)|},$$

справедливость которого вытекает из определения чисел k_0 и k.

Наконец, при

$$|\tau| \geqslant \delta_0\sqrt{\varepsilon^{-1}|\dot{p}(0)|} \quad (\tau \in \Delta(\alpha, \beta; \varepsilon))$$

неравенство (6) будет выполнено, если

$$\varepsilon l_0 \leqslant \min p^2(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], t \overline{\in} (-\delta_0, \delta_0)),$$

т. е. если ε достаточно мало.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана в рассматриваемом частном случае. Ясно, как нужно видоизменить рассуждения в общем случае.

Приведем одно приложение теоремы 1. Для уравнения (1) рассмотрим на отрезке $[\alpha, \beta]$ первую краевую задачу. Как известно, эта краевая задача имеет простое вещественное собственное значение $\lambda_0(\varepsilon)$, которому отвечает положительная на интервале (α, β) собственная функция. Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы* 1 *справедливо равенство*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_0(\varepsilon) = \mu_0.$$

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
20 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, 2, 1963. [2] Е. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», 1965. [3] Ch. J. de la Vallée-Poussin, J. Math. Pure et Appl., (9) 8, 125 (1929). [4] А. Ю. Левин, УМН, 24, в. 2 (146), 43 (1969).