Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. ЛЮКСЕМБУРГ

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ИМЕЮЩИХ ТРАНСФИНИТНУЮ РАЗМЕРНОСТЬ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 II 1971)

Зафиксируем предельный трансфинит β. Каждому пространству Z сопоставим замкнутое подмножество $P(Z)$ такое, что $Z\setminus P(Z)$ есть объединение всех открытых в Z множеств индуктивной малой размерности $<\beta$.

Определение 1. Пространство X называется β-допустимым, если

1) для каждого порядкового числа ξ существует замкнутое множество $P^\xi(X)$, причем $P^0(X)=X$;

2) $P^{\xi+1}(X)=P(P^\xi(X))$ и $P^{\xi_0}(X)=\bigcap\limits_{\xi<\xi_0}P^\xi(X)$, если ξ_0 — предельный трансфинит;

3) $P^{\xi+1}(X)\neq P^\xi(X)$, если $P^\xi(X)\neq\phi$.

Отсюда следует, что существует ξ такое, что $P^\xi(X)=\phi$. Наименьшее такое ξ, при котором $P^\xi(X)=\phi$ обозначим через $T_\beta(X)$. Легко видеть, что $|T_\beta(X)|\leqslant wX$, где wX — вес пространства X.

Определение 2. Обозначим через H_β класс полных пространств X со счетной базой таких, что $X=\bigcup\limits_{i=1}^\infty F_i$, $\operatorname{ind}F_i<\beta$ и множества F_i замкнуты в X.

Пусть $\alpha\geqslant\beta$, тогда через $H_{\alpha\beta}$ обозначим подкласс H_β, состоящий из пространств X с условием $\operatorname{ind}X=\alpha$.

Если $\alpha\geqslant\beta$, то, поскольку $X=\bigcup\limits_{i=1}^\infty F_i$, $\operatorname{ind}F_i<\beta$ и множества F_i замкнуты, множество $X\setminus P(X)$ непусто по теореме Бэра. Аналогично, если $P^\xi(X)\neq\phi$, то $P^{\xi+1}(X)\neq P^\xi(X)$. Отсюда следует, что класс H_β состоит из β-допустимых пространств, причем $T_\beta(X)$ — счетное число для любого $X\in H_\beta$. Заметим, что если $X\in H_\beta$, то $\operatorname{ind}X$ — счетное число (см. [1]). Поэтому в дальнейшем α и β будут обозначать счетные трансфиниты.

Лемма 1. *Если $A\subseteq B$ и пространства A, B β-допустимы, то $T_\beta(A)\leqslant T_\beta(B)$.*

Лемма 2. *Если Z — компакт, то $T_\beta(Z)$ — непредельное порядковое число.*

Пусть Y — произвольное пространство со счетной базой, K — компакт размерности $\operatorname{ind}K\leqslant\delta$. Пусть K лежит в гильбертовом кубе I^ω. Тогда в I^ω можно выбрать такую счетную систему открытых множеств $\{V_n\}$, $n=1,2,\ldots$, что 1) $\operatorname{diam}V_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, 2) система $\{V_n''=V_n\cap K\}$ образует базис в K, 3) $U_n=\{V_n\setminus\overline{\bigcup\limits_{i>n}V_i}\}\neq\phi$, 4) $\operatorname{ind}(\operatorname{Fr}V_n\cap K)<\delta$, 5) в любой окрестности компакта K в I^ω лежат все, за исключением, быть может, конечного числа, множества V_n. В каждом U_n выбираем множество Y_n, гомеоморфное Y. Пространство, состоящее из K и множеств Y_n с индуцированной из I^ω топологией, обозначим через $\lambda(K,Y)$.

Лемма 3. а) *Если Y — компакт, то и $\lambda(K,Y)$ — компакт, если K и $Y\in H_\beta$ (или $H_{\alpha\beta}$), то и $\lambda(K,Y)\in H_\beta$ (или $H_{\alpha\beta}$);*

б) $\operatorname{ind}\lambda(K, Y) \leqslant \max(\operatorname{ind} K, \operatorname{ind} Y)$;

в) *если* $\operatorname{ind} K \leqslant \omega_0$ *и* $\operatorname{Ind} Y \geqslant \omega_0$, *то* $\operatorname{Ind}\lambda(K, Y) = \operatorname{Ind} Y$.

Доказательство. Свойства а) и б) очевидны. Докажем свойсво в).

Рассмотрим такие замкнутые множества F и G, что $F \cap G \neq \phi$. Если $F \cap K = \phi$ или $G \cap K = \phi$, то F или G содержится в конечном числе множеств $Y_n = Y$. Отсюда легко следует существование перегородки между F и G нужной размерности. Допустим, что $F \cap K \neq \phi$ и $G \cap K \neq \phi$. Положим $V_n' = \{V_n \cap \lambda(K, Y)\}$. По построению, существуют такие множества $V_{n_1}', \ldots, V_{n_s}'$, что

$$F \cap K \subset \bigcup_{i=1}^{s} V_{n_i}' = V \subset \overline{V} \subset \lambda(K, Y) \setminus G.$$

Поскольку $\operatorname{Fr} V_n' = \operatorname{Fr}_K V_n''$, то $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} V_{n_i}' < \omega_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Следовательно, по теореме суммы, $\operatorname{Ind}\operatorname{Fr} V < \omega_0$. Заметим, что множество $F \setminus V$ лежит в конечном числе множеств $Y_n = Y$. Отсюда следует существование нужной перегородки. Лемма доказана.

Пусть дана счетная система пространств $\{Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma\}$. Тогда через $\omega\{Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma)$ обозначим пространство, получаемое добавлением к дискретной сумме пространств Y_γ точки ω, в которой топологию задаем базисом из множеств вида $\omega \bigcup\limits_{\gamma \neq \gamma_i} Y_\gamma$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Пространство $\omega(Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma)$ полно и метризуемо, если этими свойствами обладают пространства $Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma$.

Лемма 4. а) *Если* Y_γ — *компакты, то и* $\omega(Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma)$ — *компакт, если* $Y_\gamma \in H_\beta$ (*или* $H_{\alpha\beta}$), *то и* $\omega(Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma) \in H_\beta$ (*или* $H_{\alpha\beta}$);

б) $\operatorname{ind}\omega(Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma) \leqslant \sup\limits_\gamma \operatorname{ind} Y_\gamma$ *и* $\operatorname{Ind}\omega(Y_\gamma \colon \gamma \in \Gamma) \leqslant \sup\limits_\gamma \operatorname{Ind} Y_\gamma$.

Лемма 5. *Предположим, что* $Y \in H_\beta$. *Тогда для всех счетных порядковых чисел* $\gamma \geqslant 0$ *существуют такие пространства* $Y_\gamma \in H_\beta$, $Y_0 = Y$, *что выполняются следующие условия*:

а) $T_\beta(Y_\gamma) \geqslant \gamma$;

б) *если* $\operatorname{ind} Y \geqslant \beta$, *то* $\operatorname{ind} Y_\gamma = \operatorname{ind} Y$;

в) *в случае* $\beta = \omega_0$ *и* $\operatorname{Ind} Y \geqslant \omega_0$ *выполняется равенство* $\operatorname{Ind} Y = \operatorname{Ind} Y_\gamma$;

г) *если* Y — *компакт, то все* Y_γ — *также компакты.*

Доказательство. Строим пространства Y_γ по индукции. Полагаем $Y_0 = Y$. Предположим, что пространства Y построены при всех $\gamma < \gamma_0$. Если γ_0 — предельное порядковое число, то полагаем $Y_{\gamma_0} = \omega(Y_\gamma \colon \gamma < \gamma_0)$. Свойства б), в) и г) выполнены в силу леммы 4. Свойство а) следует из неравенств $T_\beta(Y_{\gamma_0}) \geqslant T_\beta(Y_\gamma) \geqslant \gamma$ *для всех* $\gamma < \gamma_0$. Допустим теперь, что γ_0 — непредельный трансфинит, δ — произвольное число $< \beta$ и K_δ — компакт, для которого $\operatorname{ind} K_\delta = \delta$ (см. ([5])). Тогда полагаем $Y_{\gamma_0} = \omega(\lambda(K_\delta, Y_{\gamma_0 - 1}) \colon \delta < \beta)$. В силу леммы 3 свойства б), в) и г) выполнены. Докажем свойство а). Пусть $T_\beta(Y_{\gamma_0 - 1}) = \xi_0$ и ξ такое число, что $\xi + 2 \leqslant \xi_0$. Тогда выполнено неравенство $\operatorname{ind} P^\xi(Y_{\gamma_0 - 1}) \geqslant \beta$. Поскольку в любой окрестности каждой точки компакта $L = \{\omega \bigcup\limits_{\delta < \beta} K_\delta\}$ содержится бесконечно много множеств $(Y_{\gamma_0 - 1})_n = Y_{\gamma_0 - 1}$, $n = 1, 2, \ldots$, то $P^{\xi + 1}(Y_{\gamma_0}) \supseteq L$. Далее, для любой окрестности O_ω точки ω в L справедливо неравенство $\operatorname{ind} O_\omega \geqslant \beta$, поэтому $P^{\xi + 2}(Y_{\gamma_0}) \ni \omega \neq \phi$. Если ξ можно выбрать так, что $\xi + 2 = \xi_0$, то $P^{\xi + 2}(Y_{\gamma_0}) = P^{\xi_0}(Y_{\gamma_0}) \neq \phi$ и $T_\beta(Y_{\gamma_0}) \geqslant \gamma_0$. Если $\xi_0 = \xi' + i$, $i = 0, 1$, где ξ' — предельное число, то $P^{\xi'}(Y_{\gamma_0}) \supset L$. Следовательно, так как $P^\xi(Y_{\gamma_0}) \supset L$ для всех $\xi < \xi'$, то $P^{\xi' + 1}(Y_{\gamma_0}) \in \omega = \phi$, откуда $T_\beta(Y_{\gamma_0}) \geqslant \xi' + 2 > \gamma_0$. Лемма 5 доказана.

Теорема 1. *В классах* $H_{\alpha\beta}$ *и* H_β *нет универсального элемента.*

Доказательство. Предположим, что $X \in H_{\alpha\beta}$ и $T(X) = \gamma$. Тогда по лемме 5 выбираем элемент $X_{\gamma+1} \in H_{\alpha\beta}$ такой, что $T(X_{\gamma+1}) \geqslant \gamma + 1$. Отсюда, в силу леммы 1 X не может быть универсальным элементом класса $H_{\alpha\beta}$. Доказательство для класса H_β проводится аналогично.

Следствие 1. *В классе слабо-счетномерных * полных метрических пространств со счетной базой нет универсального элемента.*

Следствие 2. *В классе слабо-счетномерных полных метрических пространств X со счетной базой, имеющих трансфинитную размерность $\operatorname{ind} X = \alpha \geqslant \omega_0$, нет универсального элемента.*

Следствие 3 (см. ([4])). *В классе слабо-счетномерных компактов нет универсального элемента.*

Теорема 2. *В классе компактов $X \in H_{\alpha\beta}$ нет универсального элемента.*

Теорема 3. *В классе слабо-счетномерных компактов X размерности $\operatorname{Ind} X = \alpha$ при $\alpha \geqslant \omega_0$ нет универсального элемента.*

Теорема 4. *В классе C_α метрических слабо-счетномерных пространств X данного веса, имеющих трансфинитную размерность $\operatorname{Ind} X = \alpha \geqslant \omega_0$, нет универсального элемента.*

Определение 3 (см. ([3])). Пространство X слабо-бесконечномерно, если для любой счетной системы пар замкнутых множеств (F_i, G_i), $F_i \cap G_i = \phi$, $i = 1, 2, \ldots$, найдется такое конечное число замкнутых множеств C_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, что

а) C_i отделяет F_i от G_i,

б) $\bigcap\limits_{i=1}^{k} C_i = \phi$.

Теорема 5. *В классе слабо-бесконечномерных метрических пространств X веса τ таких, что*

а) $\operatorname{Ind} X = \alpha \geqslant \beta$,

б) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, *$F_i$ замкнуты и $\operatorname{ind} F_i < \beta$, нет универсального элемента.*

В дальнейшем число $T\omega_0(X)$ будем обозначать через $T(X)$.

Определение 4. Сопоставим каждому порядковому числу $\alpha \geqslant 1$ число $L(\alpha)$ следующим образом: $L(1) = 0$, $L(\alpha) = \omega_0 \times (-1 + \alpha)$ **, $\alpha \geqslant 2$.

Согласно лемме 5, существуют пространства, имеющие сколь угодно большой счетный размерностный тип $T(X)$ при фиксированной размерности. Однако, если фиксировано число $T(X)$, то размерность ограничена сверху, как показывает

Теорема 6. *Для любого ω_0-допустимого компакта имеет место неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant L(T(X)) + \operatorname{Ind} P^{T(X)-1}(X)$* ***.

Доказательство. Положим $\varphi(X) = L(T(X)) + \operatorname{Ind} P^{T(X)-1}(X)$. Тогда, очевидно, что достаточно доказать, что между любыми замкнутыми F и G такими, что $F \cap G = \phi$, существует перегородка C с условием $\varphi(C) < \varphi(X)$. Пусть C — такая перегородка, что $\operatorname{Ind}(C \cap P^{T(X)-1}(X)) + 1 \leqslant \operatorname{Ind} P^{T(X)-1}(X)$. Тогда, если $T(C) < T(X)$, то $L(T(C)) + \omega_0 < L(T(X))$ и, следовательно, $\varphi(C) < \varphi(X)$. Если $T(X) = T(C)$, то, так как $P^{T(C)-1}(C) \subseteq P^{T(X)-1}(X)$ и, следовательно, $\operatorname{Ind} P^{T(C)-1}(C) \leqslant \operatorname{Ind} P^{T(X)-1}(X) \cap C$, имеем $\varphi(C) = L(T(C)) + \operatorname{Ind} P^{T(C)-1}(C) = L(T(X)) + \operatorname{Ind} P^{T(X)-1}(C) \leqslant L(T(X)) + \operatorname{Ind} P^{T(X)-1}(X) - 1$. Теорема доказана

Предположение 1. *Для компактов Смирнова K_δ $(\delta < \omega_1)$ (см. ([3])) выполняется равенство*

$$\operatorname{Ind} K_\delta = \delta = L(T(K_\delta)) + \operatorname{Ind} P^{T(K_\delta)-1}(K_\delta).$$

Предложение 2. *Для любого пространства $Y \in H_\beta$ существуют пространства $Y_\gamma \in H_\beta$, $T(Y) \leqslant \gamma < \omega_1$ такие, что*

а) $Y_{T(Y)} = Y$;

б) $T_\beta(Y_\gamma) = \gamma$.

---

* Пространство называется слабо-счетномерным, если оно является объединением счетного числа замкнутых конечномерных подмножеств.

** $-1 + \alpha = \alpha'$, где $\alpha = 1 + \alpha'$.

*** Заметим, что в силу леммы 2 $T(X)$ — непредельный трансфинит.

Теорема 7. *Если $\{A_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — локально-конечная система замкнутых множеств пространства X и $T(A_\alpha) \leqslant \xi$ для любого α, то $T(\bigcup_\alpha A_\alpha) \leqslant \xi$.*

Предложение 3. *Пусть Y — компакт.*

Тогда для всех непредельных порядковых чисел γ, $\omega_1 > \gamma \geqslant T(Y)$ существуют компакты Y_γ такие, что $T(Y_\gamma) = \gamma$ и $Y_{T(Y)} = Y$. При этом, если $\operatorname{Ind} Y \geqslant \omega_0$, то $\operatorname{Ind} Y = \operatorname{Ind} Y_\gamma$.

В дальнейшем α будет обозначать трансфинит $\geqslant \omega_0$.

Определение 5. Через $\Pi(\alpha, \beta)$ обозначим класс пространств X с условием $\operatorname{Ind} X = \alpha$ и $T(X) = \beta$. Через $\Pi^K(\alpha, \beta)$ обозначим подкласс класса $\Pi(\alpha, \beta)$, состоящий из компактов.

Пусть $\xi = l + p$, где l — предельное, а p — натуральное число. Тогда p обозначим через $K(\xi)$.

Теорема 8. *Для любого ω_0-допустимого компакта X имеет место неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant L(T(X)) + K(\operatorname{Ind} X)$.*

Теорема 9. *Класс $\Pi^K(\alpha, \beta)$ непуст тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant L(\beta) + K(\alpha)$ и β — непредельный трансфинит.*

Через $\Pi(\beta)$ и $\Pi^K(\beta)$ обозначим соответственно класс пространств X с условием $T(X) = \beta$ и его подкласс, состоящий из компактов.

Теорема 10. *В классах $\Pi^K(\alpha, \beta)$ и $\Pi^K(\beta)$ нет универсального элемента (если этот класс непуст).*

Теорема 11. *Если пространство X метризуемо и ω_0-допустимо, то для всех $\xi < T(X)$ существует замкнутое множество $Y \subseteq X$ с условием $T(Y) = \xi + 1$.*

Теорема 12. *Для любых ω_0-допустимых пространств A и B выполнено неравенство $T(A \times B) \leqslant T(A) \mp T(B)$.* Через $\alpha \mp \beta$ *мы обозначаем верхнюю сумму порядковых чисел (см. [6]).*

Теорема 13. *Каждой паре порядковых чисел (δ_1, δ_2) соответствует пара бикомпактов $(K_{\delta_1}, K_{\delta_2})$ таких, что $\operatorname{Ind} K_{\delta_i} = \delta_i$, $wK_{\delta_i} = |\delta_i|$ и $T(K_{\delta_1} \times K_{\delta_2}) = T(K_{\delta_1}) \mp T(K_{\delta_2})$, $i = 1, 2$.*

В заключение автор выражает благодарность Б. А. Пасынкову за советы и интерес к работе.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
10 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Гуревич, Г. Волмен, Теория размерности, М., 1948. [2] Е. Г. Скляренко, Изв. АН СССР, сер. биол., 23, № 2 (1959). [3] Ю. М. Смирнов, Там же, 20 (1956). [4] Ю. М. Смирнов, Там же, 23, № 2 (1959). [5] Б. Т. Левшенко, ДАН, 139, № 2 (1961). [6] C. H. Toulmin, Proc. London Math. Soc., 3, № 4 (1954).