Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 513.73+513.88+517.515 *МАТЕМАТИКА*

В. Д. МИЛЬМАН

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 15 II 1971)

1. Равномерно непрерывные функции (р.н.ф.), заданные на ограниченных областях n-мерного пространства, имеют тенденцию (при увеличении n и сохранении модуля равномерной непрерывности) концентрироваться вокруг некоторого (одного) своего значения таким образом, что мера ε-окрестности соответствующей линии уровня «почти» совпадает с мерой всей области. Это обстоятельство в некоторых частных случаях было отмечено Э. Борелем, а затем (в двадцатых годах) доказано П. Леви ([1], ч. III) для произвольных р.н.ф., определенных на выпуклом теле (вещественного n-мерного пространства) с ограниченными сверху радиусами кривизн.

В настоящей статье нас также интересуют выделенные поверхности уровня р.н.ф., определенной на метрическом пространстве с некоторой многопараметрической структурой; однако изучается в основном не богатство по мере ε-оболочки этих поверхностей (хотя этот факт отмечается в п. 2 для различных однородных пространств и используется), а связь линий уровня с естественной структурой пространства (например, с линейной структурой в том случае, когда функция задана на сфере линейного нормированного пространства, см. ([2])). В этом направлении доказываются теоремы 2 и 3.

По-видимому, результаты настоящей статьи могут быть распространены на широкие классы однородных пространств. Однако здесь изучаются лишь те однородные пространства, структурная группа которых есть подгруппа группы ортогональных матриц. Моделью и основой всех результатов являются n-мерные эвклидовы сферы S_n.

2. Обозначим через $W_{n,k}$ многообразие Штифеля (множество всех k-реперов, т. е. k-ортонормированных занумерованных векторов, в n-мерном эвклидовом пространстве E_n), а $G_{n,k}$ — многообразие Грассмана (множество всех k-мерных подпространств n-мерного пространства). В каждом из указанных многообразий введем естественную метрику, наведенную геодезическим расстоянием ρ_Γ на единичной сфере S_n пространства E_n. Так, например, если $E_{(1)}$ и $E_{(2)}$ — k-мерные подпространства E_n, то геодезическое расстояние в многообразии Грассмана $\rho_\Gamma(E_{(1)}, E_{(2)})$ есть хаусдорфово (геодезическое) расстояние между единичными сферами $S(E_i) = \{x \in E_{(i)}\colon \|x\| = 1\}$:

$$\rho_\Gamma(E_{(1)}, E_{(2)}) = \max\{\max_{x\in S(E_{(2)})} \rho_\Gamma(x, S(E_{(1)}); \quad \max_{y\in S(E_{(1)})} \rho_\Gamma(y, S(E_{(2)}))\}.$$

Очевидно, что $W_{n,1} = S_n$ и $W_{n,n} = O_n$ (ортогональная группа). Отметим также (это используется ниже), что $W_{n,k}$ и $G_{n,k}$ — однородные пространства, а именно, $W_{n,k} = O_n / O_{n-k}$ и $G_{n,k} = (O_n / O_{n-k}) \times O_k$.

Мы будем рассматривать также прямые произведения $W_{n,k_1} \times \ldots \times W_{n,k_p}$ (в частности, $S_n \times \ldots \times S_n$), которые также являются метрическими однородными пространствами. Ниже через $\{V_n\}_1^\infty$ обозначается одна из следующих серий многообразий: $\{W_{n,k(n)}\}_{n=1}^\infty$, либо $\{G_{n,k(n)}\}_{n=1}^\infty$, либо $\{W_{n,k_1(n)} \times \ldots \times W_{n,k_{p(n)}(n)}\}_{n=1}^\infty$, где всюду $1 \leqslant k(n) \leqslant n$, $\sup_n p(n) < \infty$ *.

Пусть μ — нормированная на 1 мера Хаара на V_n, т. е. $\mu(V_n) = 1$ и мера μ инвариантна относительно ортогональных преобразований (сохраняющих также метрику) V_n на себя. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C(V_n)$ и обозначим $\omega_f(\varepsilon) = \sup\{|f(x_1) - f(x_2)|: \rho_r(x_1, x_2) \leqslant \varepsilon,\ x_i \in V_n\}$ модуль непрерывности функции $f(x)$.

Средним Леви функции $f(x)$ назовем такое число $l(f)$, что $\mu\{x\colon f(x) < l(f)\} \leqslant 1/2$ и $\mu\{x\colon f(x) > l(f)\} \leqslant 1/2$. Среднее Леви существует для любой функции из $C(V_n)$.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C(V_n)$ и $l(f)$ — среднее Леви функции f. Обозначим $\mathfrak{A}_\varepsilon(f) = \{y \in V_n\colon \rho_r(y, x) \leqslant \varepsilon$, где $f(x) = l(f)\}$.*

Тогда при $\varepsilon > 0$

$$\inf\{\mu(\mathfrak{A}_\varepsilon(f))\colon f \in C(V_n)\} = 1 - \alpha_n(\varepsilon), \tag{1}$$

где $\alpha_n(\varepsilon) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Замечание 1. В случае $V_n = S_n$ теорема 1 доказана П. Леви ([1], стр. 237), который получил ее из следующего изящного замечания: из классической изопериметрической задачи на сфере следует, что при любом $\varepsilon > 0$ мера ε-расширения $\mathfrak{A}_\varepsilon(f)$ (см. теорему 1) — минимальная для сечения сферы гиперплоскостью. Таким образом, в этом случае

$$\alpha_n(\varepsilon) = \int_\varepsilon^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta \Big/ \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}\theta\, d\theta.$$

3. Рассмотрим теперь естественные реализации V_{n_1} в V_{n_2} при $n_1 < n_2$ (V_{n_i} принадлежат одной серии из перечисленных последовательностей многообразий). Именно, рассмотрим вначале случай $\{V_n = W_{n,k(n)}\}_n$. Для каждой пары чисел n_2 и n_1 $(n_1 < n_2)$ таких, что $k(n_2) \geqslant k(n_1)$, рассмотрим в линейном пространстве $E_{n_2}(\dim E_{n_2} = n_2)$ произвольное подпространство E_{n_1} размерности n_1. Отображение $\varphi_{n_1 n_2}\colon V_{n_1} \to V_{n_2}$ назовем естественным вложением, если многообразие $V_{n_1} = W_{n_1,k(n_1)}$ реализуется в виде подмногообразия V_{n_2} как множество всех $k(n_1)$-реперов в подпространстве $E_{n_1} \subset E_{n_2}$ при фиксированных (вместе с отображением φ_{n_1,n_2}) оставшихся от $k(n_2)$-репера из V_{n_2} ортах (в количестве $k(n_2) - k(n_1)$). В том случае, когда $k(n_2) = k_2 < k_1 = k(n_1)$, естественное отображение $W_{n_1,k_1} \to W_{n_2,k_2}$ ставит произвольному k_1-реперу, лежащему в подпространстве E_{n_1}, k_2-репер, состоящий из первых k_2 ортов. Так, например, в случае, когда $k(n) \equiv 1$, а значит, $\{V_n = S_n\}_{n=1}^\infty$, естественные отображения $\varphi_{n_1 n_2}$ есть просто линейные вложения сферы S_{n_1} в сферу S_{n_2} $(n_2 > n_1)$, т. е. S_{n_1} реализуется в виде сечения сферы S_{n_2} некоторым n_1-мерным подпространством. В случае, когда $\{V_n\}$ есть серия многообразий Грассмана (при некоторой функции $k(n)$) класс естественных отображений $\{\varphi_{n_1 n_2}\}_{n_1 < n_2}$ определяется так же, как и в случае серии штифелевых многообразий. Для серии, состоящей из прямых произведений многообразий, естественные отображения — это произведение описанных естественных отображений для каждого многообразия.

Теорема 2. *Пусть $V = \{V_n\}_1^\infty$ — одна из указанных серий многообразий, $\Phi = \{\Phi_{n_1,n_2}\}$, где Φ_{n_1,n_2} — множество всех описанных выше естественных отображений $V_{n_1} \to V_{n_2}$ $(n_1 < n_2)$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и n_1 найдется n_2 такое, что для любой функции $f \in C(V_{n_2})$ найдется число a_f и $\varphi_{n_1,n_2} \in \Phi_{n_1 n_2}$, что

$$\max_{x \in \varphi_{n_1 n_2} V_{n_1}} |f(x) - a_f| < \omega_f(\varepsilon).$$

* Требование ограниченности $p(n)$ можно существенно ослабить.

Таким образом, на подмногообразии $\varphi_{n_1n_2}V_{n_1}$ функция $f(x)$ постоянна с точностью $\omega_f(\varepsilon)$ ($\omega_f(\varepsilon)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$).

Замечание 2. В качестве числа a_f можно взять среднее Леви $l(f)$ функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 2 просто следует из теоремы 1 и свойств меры Хаара. Например, в случае $k(n) \equiv k$ используется формула

$$I_s^{O_{n_2}/O_{n_2+n_1}\times O_{n_1}} I_t^{O_{n_1}/O_{n_1-k}} \chi(s\cdot t) = I^{O_{n_2}/O_{n_2-k}} \chi, \tag{2}$$

где I^V — инвариантный интеграл на многообразии V, порожденный нормированной (на 1) мерой Хаара, и $\chi \in L_1[W_{n_2,k}]$. Из формулы (2), примененной к характеристической функции χ множества $\mathfrak{A}_\varepsilon(f)$ (см. теорему 1), получаем (используя также (1)), что при фиксированном n_1 и $\varepsilon/2$ найдется подпространство $E_{n_1} \subset E_{n_2}$ ($\dim E_{n_1} = n_1$) такое, что $\mu(\mathfrak{A}_{\varepsilon/2}(f) \cap \cap W_{n_1,k}) \geqslant 1 - \alpha_{n_2}$, где μ — нормированная мера Хаара многообразия $W_{n_1,k}$ всех k-реперов из E_{n_1} и $\alpha_{n_2} \to 0$ при $n_2 \to \infty$. Следовательно, если α_{n_2} меньше меры геодезической сферы радиуса $\varepsilon/2$ на $W_{n_1,k}$, то $W_{n_1,k} \subset \mathfrak{A}_\varepsilon(f)$; здесь $W_{n_1,k}$ реализовано в выбранном ранее подпространстве E_{n_1}. Таким образом, разобран частный случай теоремы 2 для серии многообразий $\{W_{n,k}\}_n^\infty$. Однако для этой серии мы приведем сейчас более точные результаты.

Теорема 3. *Для любой функции $f(x) \in C(W_{n_2,k})$ существует такое значение a, что при любом $\varepsilon > 0$ геодезическая ε-окрестность линии уровня $\mathfrak{A} = \{x \in W_{n_2,k}\colon f(x) = a\}$ содержит подмногообразие $W_{n_1,k}$, состоящее из всех k-реперов некоторого подпространства $E_{n_1} \subset E_{n_2}$ ($\dim E_{n_1} = n_1$); при этом*

$$n_1 = \left[\gamma_{n_2} \frac{\ln\cos\varepsilon/2}{k\ln\sin\varepsilon/2} n_2\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \left[\gamma_{n_2} \frac{\varepsilon^2}{8k\ln 2/\varepsilon} n_2\right], \tag{3}$$

где $[\beta]$ означает целую часть числа β, а $\gamma_{n_2} \to 1$ при $n_2 \to \infty$ равномерно по $f \in C(W_{n_2,k})$.

При $\varepsilon \to 0$ уже нет равномерного стремления γ_{n_2} к 1, хотя $\gamma_{n_2} \to 1$ (при $n_2 \to \infty$), если только $\varepsilon(n_2)\sqrt{n_2/\ln n_2} \to \infty$ ($n_2 \to \infty$).

Можно дать более точную формулу, чем (3) и уже равномерную по n_2, k и $\varepsilon > 0$, однако она более громоздкая, и потому мы не приводим ее. Для случая сферы $S_n = W_{n,1}$, т. е. при $k = 1$, точную формулу и различные следствия из нее, как, например, теорему А. Дворецкого ([3]), мы разбираем в ([4]).

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{A}_1$ — произвольное множество на многообразии $W_{n_2,k}$ всех k-реперов пространства E_{n_2}, $\mathfrak{A}_2 = W_{n_2,k} \setminus \mathfrak{A}_1$.*

Тогда одно из ε-расширений этих множеств $(\mathfrak{A}_i)_\varepsilon = \{x \in W_{n_2,k}\colon \rho_\Gamma(x, \mathfrak{A}_i) \leqslant \varepsilon\}$, $i = 1, 2$, содержит подмногообразие $W_{n_1,k}$, состоящее из всех k-реперов некоторого подпространства $E_{n_1}^0 \subset E_{n_2}$, где размерность n_1 задается формулой (3).

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{A} \subset W_{n_2,k}$ и для любого подпространства $E_{n_1} \subset E_{n_2}$ ($\dim E_{n_1} = n_1$), размерность n_1 которого оценивается снизу формулой (3), существует лежащий в E_{n_1} k-репер $x \in \mathfrak{A}$.*

Тогда ε-окрестность множества $\mathfrak{A}$ содержит подмногообразие $W_{n_1,k}$, состоящее из всех k-реперов некоторого подпространства $E_{n_1}^0 \subset E_{n_2}$.

4. Наметим доказательство теоремы 1 в простейшем случае многообразия Штифеля $W_{n,2}$. Следующим образом реализуем $W_{n,2}$ как подмногообразие на единичной сфере S_{2n} $2n$-мерного пространства E_{2n}. Обозначим $\{e_k\}_1^{2n}$ ортонормированный базис в E_{2n},

$$z = \sum_1^n a_k e_k + \sum_{n+1}^{2n} a_k e_k = (x;\, y) \in E_{2n}, \quad x = \sum_1^n a_k e_k, \quad y = \sum_{n+1}^{2n} a_k e_k.$$

Таким образом, каждое $z \in E_{2n}$ отображается в пару векторов x и y n-мерного пространства E_n. Введем две функции, заданные на сфере S_{2n}:

$$f_1(z) = \|x\|^2 - \|y\|^2, \quad f_2(z) = \langle x, y\rangle, \quad \|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1,$$

$$z = (x; y) = \sum_{k=1}^{2n} a_k e_k$$

и скалярное произведение

$$\langle x, y\rangle = \sum_1^n a_k \cdot a_{n+k}.$$

Ясно, что многообразие $M_2 = \{z \in S_{2n}: f_1(z) = f_2(z) = 0\}$ реализует вложение $W_{n,2}$ в сферу S_{2n}. Перечислим основные свойства этой реализации.

a) $M_{(2)}$ инвариантно относительно такой подгруппы O_n' ортогональных преобразований O_{2n}, что $A^0 \in O_n' \Leftrightarrow A^0(x; y) = (Ax; Ay)$, *где* $z = (x; y) \in E_{2n}$ и $A \in O_n$.

b) $(2n-3)$-мерная мера Лебега μ на $M_{(2)}$ (индуцированная мерой Лебега μ_s на S_{2n}) есть мера Хаара однородного пространства $M_{(2)} (\equiv W_{n,2})$.

c) Значение 0 есть среднее Леви для функций $f_i(z)$, $i = 1, 2$.

d) Пусть $z = (x; y) \in S_{2n}$ и $|\langle x, y\rangle| < \|x\| \cdot \|y\|$. Тогда существует единственная ближайшая к z точка $z_0 \in M_{(2)}$, которая соединяется с z геодезической, нормальной к $M_{(2)}$. Множество всех таких $z \in S_{2n}$ обозначим $D(z_0)$; обозначим также $D_\varepsilon(z_0) = \{z \in D(z_0): \rho_r(z, z_0) \leqslant \varepsilon\}$, $D_\varepsilon(\mathfrak{A}) = \bigcup_{z \in \mathfrak{A}} D_\varepsilon(z)$ (где $\mathfrak{A} \subset M_{(2)}$). Ясно, что если $A^0 \in O_n'$ и $A^0 z_1 = z_2$ $(z_i \in M_{(2)})$, то $A^0 D_\varepsilon(z_1) = D_\varepsilon(z_2)$.

e) Пусть $\mathfrak{A}^{(i)}$, $i = 1, 2$,— произвольные открытые подмножества $M_{(2)}$. Из (a), (b) и (d) следует, что $\mu(\mathfrak{A}^{(1)}) / \mu(\mathfrak{A}^{(2)}) = \mu_s(D_\varepsilon(\mathfrak{A}^{(1)})) / \mu_s(D_\varepsilon(\mathfrak{A}^{(2)}))$ при любом $\varepsilon > 0$.

Таким образом, меры множества из $M_{(2)}$ можно вычислять по мерам соответствующих множеств сферы S_{2n}. Это дает возможность использовать для доказательства теоремы 1 (в случае $V_n = W_{n,2}$) аналогичную теорему для сферы S_{2n}, принадлежащую П. Леви (см. замечание 1). При этом важную роль играет свойство (c).

Заметим, что прямое (без сведения к случаю сферы) доказательство теоремы 1, аналогичное изложенному в замечании 1 для S_n, требует предварительного решения классической изопериметрической задачи для соответствующего многообразия V_n.

Поступило
8 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Леви, Конкретные проблемы функционального анализа, М., 1967. [2] В. Д. Мильман, Функциональный анализ, 3, 2, 67 (1969). [3] A. Dvoretzky, Proc. Intern. Sympos. Linear Spacea, Jerusalem, 1961, p. 123 (Сборн. пер. Математика, 8, 1, 73 (1964)). [4] В. Д. Мильман, Функциональный анализ, 5, 4 (1971).