Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 534 *МЕХАНИКА*

В. В. ПЕТРОВ, В. М. АГЕЕВ

ЭНТРОПИЯ И АВТОКОЛЕБАНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 22 II 1971)

В процессе движения во всякой реальной системе неизбежны затраты энергии на трение и для поддержания стационарного режима происходит компенсация этих затрат за счет энергии внешнего источника, подключение которого осуществляется управляющим сигналом, несущим информацию о состоянии системы. Другими словами, существует связь между энергией и информацией в замкнутом контуре управления. Эта связь может быть более подробно проанализирована на примере простейшей релейной системы, структурная схема которой представлена на рис. 1; уравнение движения этой системы имеет вид

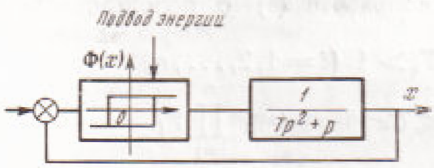

Рис. 1

$$T\ddot{x} + \dot{x} = -\Phi(x), \qquad (1)$$

где $\Phi(x)$ — релейная характеристика, имеющая петлю гистерезиса.

В этой системе будут существовать автоколебания [1], что на многолистовой фазовой поверхности соответствует замкнутой фазовой траектории. Однако, если ширина петли гистерезиса релейной характеристики является случайной величиной, то на фазовой поверхности будет не обычная замкнутая кривая, а сложный предельный цикл со случайным параметром (рис. 2).

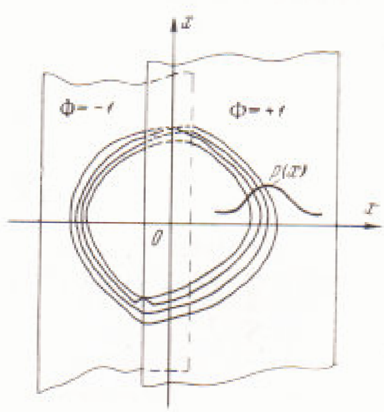

Рис. 2

Такое движение может быть охарактеризовано некоторой плотностью вероятностей $p(x)$ распределения точек пересечения фазовых траекторий с осью x [2], а неопределенность состояния системы энтропией

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log_2 p(x)\,dx. \qquad (2)$$

Если зафиксировать ширину петли гистерезиса в релейной характеристике, то в силу устойчивости предельного цикла все фазовые траектории с течением времени будут асимптотически приближаться к этому фиксированному циклу, и указанная плотность вероятности будет стремиться к δ-функции, а, следовательно, неопределенность, характеризуемая энтропией $H(x)$, неограниченно уменьшаться. Изменение неопределенности за один период может быть вычислено следующим образом. Пусть

$$\bar{x} = f(x), \qquad (3)$$

где $f(x)$ — функция последования. Тогда выражение (3) представляет точечное преобразование положительной полуоси абсцисс в самое себя.

Отклонения выходной координаты от установившегося значения x^* через один период в случае малых отклонений связаны соотношением

$$\Delta\bar{x} = df \,/\, dx|_{x=x^*} \Delta x. \tag{4}$$

Очевидно, $df \,/\, dx$ есть якобиан преобразования координат, величина которого в силу устойчивости предельного цикла по модулю меньше единицы. Согласно ([3]), изменение энтропии за один период может быть выражено как

$$\Delta H = \log_2 |df \,/\, dx|. \tag{5}$$

Отсюда следует, что энтропия системы уменьшается, что естественно связано с затуханием начальных отклонений. Но в установившемся режиме энтропия системы постоянна, так как указанная плотность вероятностей не изменяется. Очевидно, потери энтропии, вызванные затуханием возмущений, компенсируются изменением положения линии переключения на фазовой поверхности, вызванным наличием случайного параметра релейного элемента. Но изменение положения линий переключения соответствует изменению ширины петли гистерезиса, площадь которой характеризует приток энергии в систему от внешнего источника.

Таким образом, потеря энтропии, определяемая выражением (5), компенсируется энтропией внешнего источника; тем самым устанавливается непосредственная связь между энтропией и энергией.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
4 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Петров, Сборн. Автоматическое управление и вычислительная техника, в. 3, 1960. [2] И. Б. Челпанов, ПММ, № 4 (1958). [3] С. Голдман, Теория информации, ИЛ, 1957.