Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СУПЕРПОЗИЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 4 III 1971)

Пусть для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ $\xi_\varepsilon(t) \geqslant 0$,— случайный процесс, траектории которого с вероятностью 1 принадлежат пространству функций без разрывов второго рода, непрерывных справа, и ν_ε — неотрицательная с вероятностью 1 случайная величина.

Теорема 1. *Если выполняются условия*

А) *для всех* $t', t'' \in S$ *некоторому счетному всюду плотному в* $(0, \infty)$ *множеству, содержащему* 0, *и такому, что* $P\{\nu_0 \in S \setminus \{0\}\} = 0$,

$$(\nu_\varepsilon, \sup_{t\in[t', t'']} \xi_\varepsilon(t)) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (\nu_0, \sup_{t\in[t', t'']} \xi_0(t)) \text{ при } \varepsilon \to 0\ ^*,$$

$$(\nu_\varepsilon, \inf_{t\in[t', t'']} \xi_\varepsilon(t)) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (\nu_0, \inf_{t'\in[t', t'']} \xi_0(t)) \text{ при } \varepsilon \to 0;$$

В) *случайный процесс* $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, *непрерывен с вероятностью* 1 *в точке* ν_0, *т. е.*

$$P\{\lim_{t\geqslant 0,\, t\to 0} \xi_0(\nu_0 - t) = \xi_0(\nu_0)\} = 1,$$

то для любой функции $f(u, v)$, *непрерывной для всех* $(u, v) \in G$, *где* G — *подмножество* R_2 *такое, что* $P\{(\xi_0(\nu_0), \nu_0) \in G\} = 1$

$$f(\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon), \nu_\varepsilon) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(\xi_0(\nu_0), \nu_0) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Замечание 1. Для выполнения условия А) достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{A}_1)\quad 1)\ (\nu_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t)),\ t \geqslant 0, \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (\nu_0, \xi_0(t)),\ t \geqslant 0, \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

$$2)\ \lim_{c\to 0} \varlimsup_{\varepsilon\to 0} P\{\Delta_c(\xi_\varepsilon(t), T) \geqslant \delta\} = 0,\ T, \delta > 0,$$

$$\Delta_c(x(t), T) = \sup_{\substack{t-c\leqslant t'\leqslant t\leqslant t''\leqslant t+c \\ t', t, t''\in[0, T]}} \min(|x(t) - x(t')|, |x(t) - x(t'')|).$$

При этом в качестве множества S можно выбрать любое всюду плотное в $[0, \infty)$ множество точек стохастической непрерывности случайного процесса $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$ (напомним, что если случайный процесс не имеет разрывов второго рода с вероятностью 1, то он стохастически непрерывен всюду, исключая не более чем счетное число точек ([1])) такое, что $P\{\nu_0 \in S \setminus \{0\}\} = 0$.

Действительно, условие A_1) достаточно, как показано в ([1]) для слабой сходимости при $\varepsilon \to 0$ распределений измеримых функционалов $f(\cdot)$ (от случайных процессов $(\nu_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t))$, $t \in [0, T]$ и $(\nu_0, \xi_0(t))$, $t \in [0, T]$) на $D^{(2)}_{[0,T]}$ непрерывных в топологии J (здесь используются обозначения ([1])), почти всюду по мере соответствующей случайному процессу $\xi_0(t)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$. В частности, если только t', t'' — точки стохастиче-

* Символ $\overset{\text{сл}}{\Rightarrow}$ означает слабую сходимость распределений для случайных векторов и всех конечномерных распределений для случайных процессов.

ской непрерывности случайного процесса $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, то для всех u, $v \in R_1$

$$uv_\varepsilon + v \sup_{t\in[t',t'']}(\inf) \xi_\varepsilon(t) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} uv_0 + v \sup_{t\in[t',t'']}(\inf) \xi_0(t) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Очевидно, вместо условия A_1) можно было бы потребовать выполнения аналогичного условия, достаточного для сходимости соответствующих функционалов в более слабой топологии, например, M_2 ([1]).

Замечание 2. Для выполнения условия B) достаточно выполнения одного из следующих двух условий:

B_1) случайный процесс $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, стохастически непрерывен и не зависит от случайной величины v_0;

B_2) случайный процесс $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, непрерывен с вероятностью 1.

В приложениях часто $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$,— сумма случайных величин и $\xi_\varepsilon(v_\varepsilon)$ — сумма случайного числа случайных слагаемых. Рассмотрим, например, случай, когда суммируются независимые случайные величины. Будем предполагать выполненным условие

$$\text{C)} \quad v_\varepsilon = \frac{\tilde{v}_\varepsilon}{v(\varepsilon)}, \quad \xi_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{[tv(\varepsilon)]} \frac{\gamma(\varepsilon, k)}{u(\varepsilon)}, \quad t \geqslant 0,$$

где $\gamma(\varepsilon, k)$, $k \geqslant 1$,— последовательность независимых случайных величин таких, что $\max P\{\,|\gamma(\varepsilon, k)| > u(\varepsilon)\delta\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $\tilde{v}_\varepsilon$ — неотрицательные с вероятностью 1 случайные величины, $u(\varepsilon)$, $v(\varepsilon)$ — неслучайные неотрицательные функции такие, что $u(\varepsilon)$, $v(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. *Если выполняются условия* C) *и*

$$C_1) \quad 1)\ (v_\varepsilon, \xi_\varepsilon(t)), t \geqslant 0, \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (v_0, \xi_0(t)), t \geqslant 0, \quad \textit{при } \varepsilon \to 0,$$

где $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, — *стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями,*

$$2) \lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \sup_{\substack{|t'-t''|\leqslant c \\ t',\,t''\in[0,\,T]}} P\{|\xi_\varepsilon(t') - \xi_\varepsilon(t'')| \geqslant \delta\} = 0,\ T, \delta > 0,$$

3) *для случайного процесса* $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, *и случайной величины* v_0 *выполняется условие* B) (*в частности, оно выполняется, если* $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, *и* v_0 *независимы или* $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$, — *гауссовский процесс*), *то*

$$\sum_{k=1}^{[\tilde{v}_\varepsilon]} \frac{\gamma(\varepsilon, k)}{u(\varepsilon)} \Rightarrow \xi_0(v_0) \quad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Замечание 3. В ([2]) приведен ряд условий, достаточных для выполнения условий C_1), 1) и 2). В частности, условие C), 2) автоматически выполняется при выполнении условия C_1), 1), если случайные величины $\gamma(\varepsilon, k)$, $k \geqslant 1$, одинаково распределены (и, следовательно, $\xi_0(t)$, $t \geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениями).

Доказательство теоремы 2 немедленно следует из теоремы 1, поскольку ([2]) при выполнении условий C) и C_1), 1), 2) выполняется A_1). Теорема 1 позволяет также получать утверждения типа теорем переноса ([3, 4]).

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и кроме того*

а) $u(\varepsilon) = v(\varepsilon)^\alpha$, где $\alpha = \text{const} > 0$,

б) v_0 — *положительная с вероятностью 1 случайная величина.*

$$\textit{Тогда} \quad \sum_{k=1}^{[\tilde{v}_\varepsilon]} \frac{\gamma(\varepsilon, k)}{\tilde{v}_\varepsilon^\alpha} \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_0(v_0)\, v_0^{-\alpha} \quad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
16 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Скороход, Теория вероятности и ее примен., 1, 3, 289 (1956). [2] А. В. Скороход, Случайные процессы с независимыми приращениями, М., 1964. [3] J. Magyorodi, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., 7, 409 (1962). [4] В. Рихтер, Теория вероятн. и ее примен., 10, № 1, 82 (1965).