Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 539.3.374

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Н. СУПРУН

ЛОКАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ФУНКЦИЙ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ДЛЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 23 II 1971)

Использование точных соотношений между функциями ползучести и релаксации для линейных реологических моделей теории наследственности Больцмана — Вольтерра даже для нестареющих сред [1, 2] связано с существенными математическими трудностями [3]. Методы приближенного преобразования кривых ползучести в кривые релаксации [4, 5] из-за неточности и громоздкости не эффективны, например, как критерии применимости моделей теории для феноменологического описания реологических процессов.

В настоящей статье для неинвариантных относительно начала отсчета времени t линейных реологических моделей теории наследственности (для сред $\tilde{S}$) устанавливаются достаточно простые аналитические соотношения между функциями ползучести и релаксации в окрестности точки (t_1+0) приложения внешнего воздействия (локальные соотношения), которые могут быть использованы как необходимые условия применимости реологических моделей теории для описания процессов ползучести, а также для построения упрощенных резольвентных ядер.

Положим, что деформация ползучести призматического бруса $\varepsilon_{(0)}(t, t_1)$ от напряжения единичной интенсивности $1_-(t-t_1)$ при $t \in T_1 = [t_1, \infty)$, $t_1 \in T_0 = (t_0, \infty)$ является монотонно возрастающей и ограниченной функцией, претерпевающей скачок

$$[\varepsilon_{(0)}(t_1-0, t_1) = 0, \quad \varepsilon_{(0)}(t_1, t_1) = \varepsilon_{(0)}(t_1+0, t_1) = G(t_1) \neq 0);$$

здесь $1_-(t-t_1)$ — асимметричная единичная функция $[1_-(t-t_1) = 0$ при $t < t_1$, $1_-(t-t_1) = 1$ при $t \geqslant t_1]$, $t_0 \geqslant 0$ — время, с которого среда способна воспринимать нагрузку. Тогда деформация $\varepsilon(t)$ от воздействия произвольного напряжения $\sigma(t)$, являющегося дифференцируемой на T_1 функцией, в соответствии с принципом суперпозиции Больцмана, может быть представлена в виде

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_1)\,\varepsilon_{(0)}(t, t_1) + \int_{t_1}^{t} \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}\,\varepsilon_{(0)}(t, \tau)\,d\tau. \tag{1}$$

Считая, что при деформации $1_-(t-t_1)$ напряжение релаксации $\sigma_{(0)}(t, t_1)$ на множестве T_1 является монотонно убывающей и ограниченной функцией, претерпевающей скачок

$$\sigma_{(0)}(t_1-0, t_1) = 0, \quad \sigma_{(0)}(t_1, t_1) = \sigma_{(0)}(t_1+0, t_1) = E(t_1) \neq 0,$$

получим выражение для напряжения $\sigma(t)$ при деформации $\varepsilon(t)$, являющейся дифференцируемой на T_1 функцией:

$$\sigma(t) = \sigma_{(0)}(t, t_1)\,\varepsilon(t_1) + \int_{t_1}^{t} \sigma_{(0)}(t, \tau)\,\frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{2}$$

Можно показать, используя признак Абеля, что если функция $\varepsilon(t)$ ($\sigma(t)$ в выражении (1)) существует, имеет конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty}\varepsilon(t) = \varepsilon(\infty)$ ($\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) = \sigma(\infty)$) и производная $d\varepsilon(t)/dt$ ($d\sigma(t)/dt$) имеет лишь конечное число точек разрыва, то интеграл в (2) (в (1)) при $t\to\infty$ сходится.

Условимся обозначать

$$\varepsilon_{(0)}^{(k)}(t, t_1) \doteq d^k\varepsilon_{(0)}(t, t_1)/dt^k, \quad \sigma_{(0)}^{(k)}(t, t_1) \doteq d^k\sigma_{(0)}(t, t_1)/dt^k,$$
$$G_j^{(i)}(t) \doteq d^iG_j(t)/dt^i \doteq d^i\varepsilon_{(0)}^{(j)}(t, t)/dt^i, \quad E_j^{(i)}(t) \doteq d^iE_j(t)/dt^i \doteq d^i\sigma_{(0)}^{(j)}(t, t)/dt^i.$$

Здесь $G_j(t)$, $E_j(t)$ — модули мгновенной податливости и упругости j-го рода, характеризующие изменения при старении значений производных порядка j от кривых релаксации, ползучести, соответственно.

Теорема 1. *Если в окрестности t_1+0 для функции ползучести выполняются требования дифференцируемости и существования при $t\to t_1$ конечных производных $\varepsilon_{(0)}^{(i)}(t_1, t_1)$, $G_j^{(l)}(t_1)$ (до $i=m$, $l=m-1-j$ порядков включительно), а исследуемая среда является средой $\bar{S}$, то функция релаксации будет m раз дифференцируема в окрестности t_1+0 и будет иметь конечные производные $\sigma_{(0)}^{(i)}(t_1, t_1)$ до $i=m$ порядка включительно, определяемые системой алгебраических уравнений ($k = 1, 2, \ldots, m$):*

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1-j}\binom{k-1-j}{i}G_j^{(i)}(t_1)\,\sigma_{(0)}^{(k-j-i)}(t_1, t_1) = -G^{-1}(t_1)\,\varepsilon_{(0)}^{(k)}(t_1, t_1). \tag{3}$$

Доказательство. При процессе релаксации выражение (1) будет иметь вид ($\varepsilon(t) = 1_-(t-t_1)$, $\sigma(t) = \sigma_{(0)}(t, t_1)$)

$$1_-(t-t_1) = \sigma_{(0)}(t_1, t_1)\,\varepsilon_{(0)}(t, t_1) + \int\limits_{t_1}^{t}\sigma_{(0)}^{(1)}(\tau, t_1)\,\varepsilon_{(0)}(t, \tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Устремляя $t\to t_1$, получим

$$E(t_1)G(t_1) = 1. \tag{5}$$

Дифференцируя обе части уравнения (4) по $t \in t_1+0$, убеждаемся, что $\sigma_{(0)}^{(1)}(t, t_1)$ выражается через $m-1$ раз дифференцируемые функции. Произведя дифференцирование k раз ($k = 1, 2, \ldots, m$), устремляя $t\to t_1$ и используя (5), будем последовательно получать уравнения (3). Так как матрица системы (3) треугольная и элементы главной диагонали $G(t_1) \neq 0$, то при условиях теоремы всегда существуют конечные значения производных $S^{(i)}(t_1, t_1)$ (до m-го порядка включительно).

Теорема 2. *Если в окрестности t_1+0 для функции релаксации выполняются требования дифференцируемости и существования при $t\to t_1$ конечных производных $\sigma_{(0)}^{(i)}(t_1, t_1)$, $E_j^{(l)}(t_1)$ (до $i=m$, $l=m-1-j$ порядков включительно), а исследуемая среда является средой $\bar{S}$, то функция ползучести будет m раз дифференцируемая в окрестности t_1+0 и будет иметь конечные производные $\varepsilon_{(0)}^{(i)}(t_1, t_1)$ до $i=m$ порядка включительно, определяемые системой алгебраических уравнений ($k=1, 2, \ldots, m$):*

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-j-1}\binom{k-j-1}{i}E_j^{(i)}(t_1)\,\varepsilon_{(0)}^{(k-j-i)}(t_1, t_1) = -E^{-1}(t_1)\,\sigma_{(0)}^{(k)}(t_1, t_1). \tag{6}$$

Доказательство строится аналогично, путем использования уравнения (2) для случая ползучести.

Соотношения (5) и уравнения выражений (3), (6)

$$\varepsilon_{(0)}^{(1)}(t_1, t_1) = -G^2(t_1)\,\sigma_0^{(1)}(t_1, t_1), \tag{3'}$$
$$\varepsilon_0^{(2)}(t_1, t_1) = -G^2(t_1)\,\sigma_{(0)}^{(2)}(t_1, t_1) - G(t_1)\,[G^{(1)}(t_1) + G_1(t_1)]\,\sigma_{(0)}^{(1)}(t, t_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_{(0)}^{(1)}(t_1, t_1) = -E^2(t_1)\,\varepsilon_{(0)}^{(1)}(t_1, t_1),$$
$$\sigma_{(0)}^{(2)}(t_1, t_1) = -E^2(t_1)\,\varepsilon_0^{(2)}(t_1, t_1) - E(t_1)\,[E^{(1)}(t_1) + E_1(t_1)]\,\varepsilon_{(0)}^{(1)}(t_1, t_1), \tag{6'}$$

являются необходимыми условиями точного соответствия исследуемого процесса, известного по экспериментальным кривым ползучести и релаксации, и класса реологических моделей $\bar{S}$; при этом не требуется предварительного построения ядер интегральных уравнений. В зависимости от степени неудовлетворения равенств (3′), (6′) производными (вычисленными по нисходящим разностям), можно рекомендовать предварительное построение аппроксимирующих функций из класса реологических моделей $\bar{S}$ или применение более сложных классов моделей.

Горьковский инженерно-строительный институт им. В. П. Чкалова

Поступило 22 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Gross, Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity, Paris, 1953. [2] Дж. Ферри, Вязкоупругие свойства полимеров, М., 1953. [3] Ю. Н. Работнов, Ползучесть элементов конструкций, М., 1966. [4] H. Leaderman, Rheology, 2, N. Y., 1958. [5] J. J. Aklonis, A. V. Tobolsky, J. Appl. Phys., 37, № 5, 1949 (1966).