Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 518

МАТЕМАТИКА

Г. С. ХОВАНСКИЙ, Е. А. СИЛАЕВА

О НОМОГРАФИРОВАНИИ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА И ФОРМУЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ТАБЛИЦАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ВХОДАМИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 26 II 1971)

Полные уравнения третьего и четвертого номографического порядка с тремя переменными [1] будем называть обобщенными, если их коэффициенты являются функциями четвертой переменной t:

$$A(t)f_1(x)f_2(y)f_3(z)+B(t)f_1(x)f_2(y)+C(t)f_1(x)f_3(z)+\\+D(t)f_2(y)f_3(z)+E(t)f_1(x)+F(t)f_2(y)+G(t)f_3(z)+K(t)=0; \qquad (1)$$

$$[a_0(t)f_1(x)f_2(y)+a_1(t)f_1(x)+a_2(t)f_2(y)+a_3(t)]f_3(z)+\\+[b_0(t)f_1(x)f_2(y)+b_1(t)f_1(x)+b_2(t)f_2(y)+b_3(t)]g_3(z)+\\+[c_0(t)f_1(x)f_2(y)+c_1(t)f_1(x)+c_2(t)f_2(y)+c_3(t)]h_3(z)=0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) при $t=\text{const}$ дробно-линейными или трансцендентными преобразованиями всегда может быть приведено к виду

$$F_1(x)+F_2(y)=F_3(z). \qquad (3)$$

В функции F_1, F_2 и F_3 войдут коэффициенты уравнения (1). Если их считать опять функциями t, то уравнение (3) примет вид

$$F_{14}(x, t)+F_{24}(y, t)=F_{34}(z, t). \qquad (4)$$

Уравнение (4) может быть представлено приспособляемой номограммой из равноудаленных точек [2], состоящей из семейства параллельных прямых t и пересекающих его семейств линий x, y, z.

Для уравнения (2) при $t=\text{const}$ может быть построена шкальная номограмма из выравненных точек. Коэффициенты уравнения (2) входят только в уравнения шкал x и y этой номограммы, но не входят в уравнения шкалы z. Поэтому, считая величину t переменной, придем к номограмме, состоящей из шкалы z и двух бинарных полей (x, t) и (y, t).

Уравнение (2) и его номограмма обобщаются на случай пяти переменных путем замены функций f_3, g_3 и h_3 на функции f_{34}, g_{34} и h_{34}:

$$[a_0(u)f_1(x)f_2(y)+a_1(u)f_1(x)+a_2(u)f_2(y)+a_3(u)]f_{34}(z, t)+\\+[b_0(u)f_1(x)f_2(y)+b_1(u)f_1(x)+b_2(u)f_2(y)+b_3(u)]g_{34}(z, t)+\\+[c_0(u)f_1(x)f_2(y)+c_1(u)f_1(x)+c_2(u)f_2(y)+c_3(u)]h_{34}(z, t)=0. \qquad (5)$$

Номограмма уравнения (5) состоит из трех бинарных полей (u, x), (u, y) и (z, t), связанных одним выравниванием. Частным случаем уравнения (5) является

$$(a_0f_1f_2+a_1f_1+a_2f_2+a_3)f_{34}+(b_0f_1f_2+b_1f_1+b_2f_2+b_3)g_{34}+\\+(c_0f_1f_2+c_1f_1+c_2f_2+c_3)h_{34}=0, \qquad (6)$$

в котором a_0, a_1, a_2, ..., c_2, c_3 — числовые коэффициенты.

Полное уравнение четвертого номографического порядка с четырьмя переменными

$$Af_1f_2f_3f_4 + Bf_1f_2f_3 + Cf_1f_2f_4 + Df_1f_3f_4 + Ef_2f_3f_4 +$$
$$+ Ff_1f_2 + Gf_1f_3 + Hf_1f_4 + Kf_2f_3 + Lf_2f_4 + Mf_3f_4 +$$
$$+ Nf_1 + Qf_2 + Rf_3 + Sf_4 + T = 0 \qquad (7)$$

можно рассматривать как частный случай уравнения (1). Уравнение (7) приводится к виду (1) четырьмя способами, отличающимися друг от друга тем, какая из переменных x, y, z или t входит в коэффициенты уравнения (1). Для последнего случая имеем

$$(Af_4 + B)f_1f_2f_3 + (Cf_4 + F)f_1f_2 + (Df_4 + G)f_1f_3 + (Ef_4 + K)f_2f_3 +$$
$$+ (Hf_4 + N)f_1 + (Lf_4 + Q)f_2 + (Mf_4 + R)f_3 + (Sf_4 + T) = 0.$$

В [3] была развита методика номографирования формул для последовательной линейной интерполяции в таблицах с тремя и четырьмя входами

$$u = Axyz + Bxy + Cyz + Dxz + Ex + Fy + Gz + H; \qquad (8)$$
$$u = Axyzt + Bxyz + Cyzt + Dxzt + Exyt +$$
$$+ Fxy + Gyz + Kxz + Lxt + Myt + Nzt + Px + Qy + Rz + St + H, \qquad (9)$$

основанная на приведении этих зависимостей к форме Коши. Найденные обобщения уравнения третьего и четвертого номографического порядка открывают новые возможности номографирования формул (8) и (9).

Уравнение (8) можно рассматривать как частный случай уравнений (1) и (6). Оно может быть преобразовано к виду (1) тремя способами, которые соответствуют выбору в качестве переменной t величин x, y или t. Так, например, в последнем случае получаем уравнение

$$(Az + B)xy + (Dz + E)x + (Cz + F)y - u + (Gz + H) = 0,$$

которое можно записать как

$$\left[x + \frac{Cz + F}{Az + B}\right][(Az + B)y + Dz + E] = u + \frac{(Dz + E)(Cz + F)}{Az + B} - (Gz + H). \qquad (10)$$

Уравнение (10) можно представить двумя типами номограмм из выравненных точек с равномерной шкалой u и бинарными полями (x, z), (y, z). В первом случае для каждого значения $z = \mathrm{const}$ строим номограммы из выравненных точек с одинаковыми равномерными шкалами u и прямолинейными шкалами x и y по методике, описанной в [3], и объединяем их в одну. Во втором случае для каждого значения $z = \mathrm{const}$ строим номограммы из выравненных точек с одинаковыми равномерными шкалами u и шкалами x и y, расположенными на параболе, и также объединяем все номограммы в одну. При практическом построении этих номограмм могут быть использованы возможности преобразования номограмм с повторением переменной, рассмотренные в работе [4].

Таблица 1

Значения u

z	0,20		0,21	
x	700	800	700	800
$y = 9$	1729	1774	1707	1761
$y = 10$	1765	1808	1744	1796

После логарифмирования уравнение (10) примет вид

$$f_{13}(x, z) = f_{23}(y, z) + f_{43}(u, z)$$

и, следовательно, может быть представлено номограммой из равноудаленных точек. На рис. 1 приведена в качестве примера номограмма из равноудаленных точек зависимости $u = F(x, y, z)$, заданной таблицей 1, в которой допускается последовательная линейная интерполяция по переменным x, y и z.

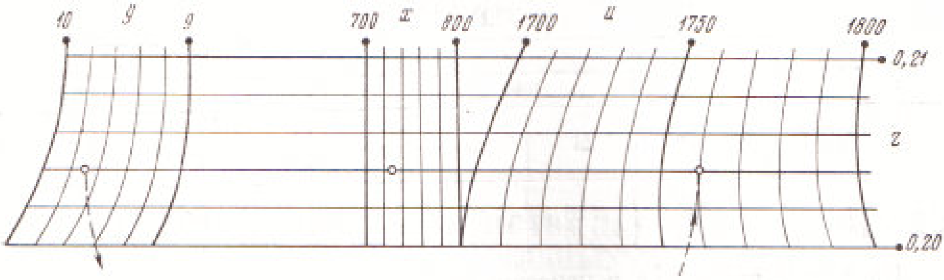

Рис. 1

На номограмме показано решение числового примера (дано: $x = 730$; $y = 9{,}7$; $z = 0{,}204$; ответ: $u = 1760$).

Уравнение (8) может быть приведено к виду (6) тремя способами в зависимости от того, какая из переменных x, y или z будет объединяться с переменной u в бинарное поле. Когда в бинарное поле объединяются переменные z и u, приведение выполняется так:

$$(Axy + Dx + Cy + G)z + (Bxy + Ex + Fy + H) - u = 0.$$

Уравнение (9) может быть приведено к виду (5) 12-ю способами. Они зависят от того, какая из переменных x, y, z или t объединяется в

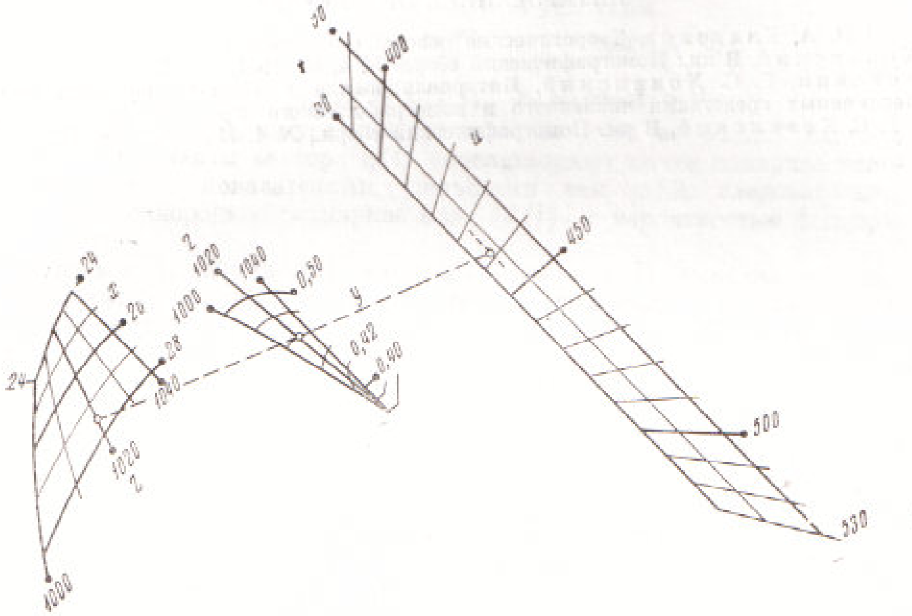

Рис. 2

бинарное поле с переменной u, и от того, какая из оставшихся трех переменных повторяется в двух других бинарных полях. Пусть, например, переменная t объединяется с переменной u в бинарное поле, а переменная z повторяется. В этом случае приведение выполняется следующим образом:

$$[(Az + E)xy + (Dz + L)x + (Cz + M)y + (Nz + S)]t +$$
$$+ [(Bz + F)xy + (Kz + P)x + (Gz + Q)y + (Rz + H)] - u = 0.$$

Таблица 2

Значения u

t	40				50			
z	1000		1040		1000		1040	
x	24	28	24	28	24	28	24	28
$y=0,40$	501	467	526	491	502	467	530	494
$y=0,50$	427	392	449	414	437	403	460	424

На рис. 2 приведена в качестве иллюстрации номограмма рассматриваемого типа для зависимости $u=F(x, y, z, t)$, заданной табл. 2, в которой допускается последовательная линейная интерполяция по всем переменным.

На номограмме показано решение числового примера (дано: $x=27{,}6$; $y=0{,}46$; $z=1020$; $t=43$; ответ: $u=439$).

В заключение отметим, что все рассмотренные нами способы номографирования справедливы лишь для невырожденных уравнений (1), (2), (5)—(9).

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Глаголев, Теоретические основы номографии, М.—Л. 1936. [2] Г. С. Хованский, В кн.: Номографический сборн. № 4, М., 1967, стр. 95. [3] В. П. Улановский, Г. С. Хованский, Интерполирование табличных функций многих переменных средствами численного и номографического представления, М., 1963. [4] Г. С. Хованский, В кн. Номографический сборн., № 1, М., 1962, стр. 122.