Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 1

УДК 517.948 : 513.88 : 518

МАТЕМАТИКА

Н. А. БОБЫЛЕВ

К ТЕОРИИ ФАКТОР-МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 4 I 1971)

Приближенное решение различных дифференциальных и интегральных уравнений, граничных задач и др. во многих случаях сводится к решению конечных систем скалярных уравнений. Основные приемы перехода к системам скалярных уравнений естественно разбиваются на две большие группы. Первую составляют так называемые проекционные методы (Ритца, Галеркина, Г. И. Петрова и т. д.). Анализ сходимости этих методов в применении к нелинейным уравнениям с вполне непрерывными операторами впервые был проведен М. А. Красносельским ([1], [2]), а затем Г. М. Вайникко ([3]). Вторую группу составляют различные конечно-разностные схемы, метод коллокации и другие методы, основанные на формулах механических квадратур и т. д. Если проекционные методы основаны на переходе от изучаемого уравнения к уравнениям в конечно-мерных подпространствах, то методам второй группы соответствует переход от изучаемых операторных уравнений к уравнениям в фактор-пространствах (по подпространствам конечного дефекта). Поэтому такие методы называют фактор-методами ([5], [6]). Лишь недавно ([5]) сходимость фактор-методов для некоторых общих классов нелинейных задач установлена Г. М. Вайникко.

В настоящей работе предлагаются новые теоремы о сходимости фактор-методов для абстрактных уравнений с нелинейными вполне непрерывными операторами.

1. Пусть E и E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — вещественные банаховы пространства. Будем предполагать, что на E определена последовательность линейных операторов P_n $(n = 1, 2, \ldots)$, причем каждый оператор P_n отображает E на соответствующее пространство E_n. Будем считать, что нормы операторов P_n равномерно ограничены и при каждом n справедлива оценка

$$\|\xi\|_{E_n} \geqslant a \inf_{x \in E;\, P_n x = \xi} \|x\|_E \quad (\xi \in E_n),$$

где a — положительная константа (не зависящая от n). Операторы P_n, следуя Г. М. Вайникко, будем называть связывающими отображениями. В качестве примера (наиболее важного для приложений) можно рассмотреть тот случай, когда E_n — это фактор-пространства E / E^n пространства E по некоторым подпространствам E^n, а P_n — канонические отображения в соответствующие фактор-пространства.

Пусть Ω и $\Omega_n = P_n\Omega$ — ограниченные области в пространствах E и E_n, а $\dot\Omega$ и $\dot\Omega_n$ — их границы. Пусть T — определенный на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \dot\Omega$ вполне непрерывный оператор, у которого нет неподвижных точек на $\dot\Omega$. Будем предполагать, что оператор T продолжен с сохранением полной непрерывности на все пространство E таким образом, что $\overline{\mathrm{co}}\, TE = \overline{\mathrm{co}}\, T\overline{\Omega}$ (здесь, как обычно через $\overline{\mathrm{co}}\, A$ обозначается замыкание выпуклой оболочки множества A); возможность указанного продолжения вытекает из теоремы Дугунджи (см., например, ([8])). Через M обозначим множество неподвижных точек оператора T, лежащих в области Ω.

Пусть на каждом E_n определен непрерывный оператор Q_n со значениями в E. Тогда определена последовательность вполне непрерывных операторов P_nTQ_n, действующих в соответствующих пространствах E_n. Через M_n обозначим множество неподвижных точек оператора P_nTQ_n, лежащих в $\overline{\Omega}_n$.

Операторы P_nTQ_n естественно рассматривать как «приближения» оператора T. Будем говорить, что операторы P_nTQ_n $(n=1, 2, \ldots)$ правильно аппроксимируют на $\overline{\Omega}$ оператор T с непустым множеством M неподвижных точек, если множества M_n при достаточно больших n непусты и если

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\xi\in M_n} \inf_{x\in M} \| P_n x - \xi \| = 0. \tag{1}$$

Иначе говоря, правильная аппроксимация означает, что уравнения $\xi = P_nTQ_n\xi$ при больших n имеют решения и эти решения «сходятся» к решениям уравнения $x = Tx$. Выяснению условий, при которых операторы P_nTQ_n правильно аппроксимируют оператор T, посвящен следующий пункт.

2. Введем обозначения

$$F = \overline{\mathrm{co}}\, T\overline{\Omega}, \quad F^0 = F \cap \overline{\Omega}, \quad F_n^0 = P_n F^0;$$

через $E(F)$ обозначим несущее подпространство множества F. Будем говорить, что последовательность непрерывных операторов Q_n, действующих из E_n в E, является P_n-правильной, если она обладает следующими свойствами:

а) Для любых таких $\xi_n, \eta_n \in E_n$, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(\xi_n, F_n^0) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \rho(\eta_n, F_n^0) = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \| \xi_n - \eta_n \| = 0$$

выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| Q_n\xi_n - Q_n\eta_n \| = 0;$$

б) при каждом $x \in F^0$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \| Q_nP_nx - x \| = 0.$$

Теорема 1. *Пусть связывающие отображения P_n удовлетворяют условиям*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \| P_n x \| \geqslant \alpha \| x \| \quad (x \in E(F)), \tag{2}$$

где $\alpha > 0$, и

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \inf_{\xi\in\overline{\Omega}_n} \| P_n x - \xi \| > 0 \quad (x \in F \setminus \overline{\Omega}). \tag{3}$$

Пусть последовательность Q_n является P_n-правильной. Пусть, наконец, вращение $\gamma(I - T, \dot{\Omega})$ вполне непрерывного векторного поля $x - Tx$ на $\dot{\Omega}$ отлично от нуля.

Тогда операторы P_nTQ_n правильно аппроксимируют на $\overline{\Omega}$ оператор T.

Теорему 1 дополняет

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2) и (3). Пусть последовательность Q_n является P_n-правильной. Пусть оператор T не имеет на $\dot{\Omega}$ неподвижных точек.*

Тогда при достаточно больших n вполне непрерывное векторное поле $\xi - P_nTQ_n\xi$ невырождено на $\dot{\Omega}_n$ и имеет место равенство вращений

$$\gamma(I - T;\ \dot{\Omega}) = \gamma(I - P_nTQ_n;\ \dot{\Omega}_n). \tag{4}$$

Из теоремы 2 вытекает, в частности, что при достаточно больших n топологические индексы (см. ([2])) множеств M и M_n решений уравнений $x = Tx$ и $\xi = P_n TQ_n \xi$ совпадают.

Вторым важным дополнением к теореме I является

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (2).

Тогда существует P_n-правильная последовательность операторов Q_n.

3. Следуя Г. М. Вайникко ([5]), будем говорить, что последовательность действующих в E_n вполне непрерывных операторов T_n компактно аппроксимирует на $\overline{\Omega}$ вполне непрерывный оператор T по отношению к связывающим отображениям P_n, если

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n Tx - T_n P_n x\| = 0 \quad (x \in \overline{\Omega}) \tag{5}$$

и если для любой последовательности $\xi_n \in \overline{\Omega}_n$ существует такая компактная последовательность $x_n \in E$, что $P_n x_n = T_n \xi_n$. Г. М. Вайникко ([5]) установил справедливость при больших n равенств

$$\gamma(I - T;\ \dot{\Omega}) = \gamma(I - T_n;\ \dot{\Omega}_n) \tag{6}$$

для случая, когда операторы T_n компактно аппроксимируют оператор T, когда выполнены неравенства

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|P_n x\| \geqslant \alpha \|x\| \quad (x \in E;\ \alpha > 0); \tag{7}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \inf_{\xi \in \overline{\Omega}_n} \|P_n x - \xi\| > 0 \quad (x \overline{\in} \overline{\Omega}) \tag{8}$$

и когда из

$$\lim_{n\to\infty} \|\xi_n - P_n x\| = 0 \quad (\xi_n \in \overline{\Omega}_n,\ x \in \overline{\Omega}) \tag{9}$$

вытекает равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n \xi_n - T_n P_n x\| = 0. \tag{10}$$

В частности, если $\gamma(I - T;\ \dot{\Omega}) \neq 0$, то компактно аппроксимирующие оператор T операторы T_n правильно аппроксимируют оператор T.

Вопрос о том, при каких условиях вполне непрерывный оператор T допускает компактную аппроксимацию, в работах Г. М. Вайникко остался открытым. Приведем один результат, относящийся к этому вопросу.

Теорема 4. *Пусть пространство E сепарабельно и пусть выполнено условие* (7).

Тогда каждый вполне непрерывный оператор T допускает компактную аппроксимацию на любой ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Для произвольных несепарабельных пространств вопрос остается открытым. Для некоторых конкретных несепарабельных пространств (например, для пространства ограниченных последовательностей) примеры вполне непрерывных операторов, не допускающих компактную аппроксимацию, конструируются без труда.

4. Пусть последовательность вполне непрерывных операторов T_n компактно аппроксимирует на $\overline{\Omega}$ вполне непрерывный оператор T. Пусть последовательность операторов Q_n является P_n-правильной. Так как и операторы T_n и операторы $P_n TQ_n$ являются «приближениями» оператора T, то возникает вопрос о связях между различными характеристиками вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi_n \xi = \xi - P_n TQ_n \xi \quad (\xi \in \overline{\Omega}_n) \tag{11}$$

и

$$\Psi_n \xi = \xi - T_n \xi \quad (\xi \in \overline{\Omega}_n). \tag{12}$$

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (7) — (10).

Тогда при достаточно больших n *в каждой точке* ξ *границы* $\dot{\Omega}_n$ *области* Ω *векторы полей* (11) *и* (12) *не направлены противоположно.*

Из общих свойств вращения ([2]) следует, что в условиях теоремы 5 при достаточно больших n поля (11) и (12) гомотопны на $\dot{\Omega}_n$ и поэтому

$$\gamma(I - P_n T Q_n;\ \dot{\Omega}_n) = \gamma(I - T_n;\ \dot{\Omega}_n).$$

Следовательно, приведенные в предыдущем пункте результаты Г. М. Вайникко содержатся в теореме 2 (которая и возникла в связи с работами Г. М. Вайникко).

Автор благодарен М. А. Красносельскому, под руководством которого он работает.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
1 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, ДАН, 73, № 6 (1950). [2] М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, 1956. [3] Г. М. Вайникко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 7, № 4 (1967). [4] А. Пелчинский, Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения к линейной топологической классификации пространств непрерывных функций, М., 1970. [5] Г. М. Вайникко, Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений, Тарту, 1970. [6] Н. Н. Гудович, Журн. вычислит. матем и матем. физ., 6, № 5 (1966).