

П. И. ЮДИЦКАЯ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ МАКСИМУМОВ СКАЛЯРНЫХ И ВЕКТОРНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 23 II 1971)

Рассмотрим $\tilde{\eta}(\bar{t})$ — векторное однородное изотропное действительное гауссовское случайное поле, непрерывное в среднем квадратичном: $\tilde{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R^n$; $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n) \in R^n$. Следуя (1), будем называть случайное поле однородным изотропным, если совместные распределения компонент вектора $\tilde{\eta}(\bar{t})$ в любой системе точек $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$ не изменяются при параллельных переносах этой системы точек, а также при ее вращениях и зеркальных отражениях, сопровождающихся одновременными вращениями и зеркальными отражениями системы координат, относительно которой рассматриваются компоненты вектора $\tilde{\eta}(\bar{t})$.

Допустим, что продольная и поперечная корреляционные функции случайного поля $\tilde{\eta}(\bar{t})$ удовлетворяют при малых t условиям

$$B_{LL}(t) = 1 - c_L t^\alpha + o(t^\alpha); \quad c_L = \text{const} > 0; \quad (1)$$

$$B_{NN}(t) = 1 - c_N t^\alpha + o(t^\alpha); \quad c_N = \text{const} > 0.$$

Как следует из (2), из условий (1) вытекает, что во всякой системе координат компоненты вектора $\tilde{\eta}(t)$ удовлетворяют почти наверное условиям Липшица с показателями, меньшими чем $\alpha/2$, следовательно, $0 < \alpha \leq 2$, и однородное скалярное поле $|\tilde{\eta}(\bar{t})|$ с вероятностью 1 непрерывно.

Теорема 1. Пусть для случайного поля $\tilde{\eta}(\bar{t})$ выполнены условия (1). Рассмотрим область D_k , полученную подобным преобразованием некоторой измеримой замкнутой области (выпуклой) с коэффициентом подобия k .

Тогда при больших k для всякого $\varepsilon > 0$ почти наверное

$$\max_{\bar{t} \in D_k} |\tilde{\eta}(\bar{t})| \leq \sqrt{2 \ln v(D_k)} + \frac{\gamma \ln \ln v(D_k)}{\sqrt{2 \ln v(D_k)}}, \quad (2)$$

где $\gamma = 3n/2 + n/\alpha - 1 + \varepsilon$; $v(\cdot)$ — мера Лебега.

При доказательстве теоремы используются некоторые идеи работы (3). Приведем необходимые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. При $x > 1$; $T_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$P_1 = P \left\{ \max_{\substack{0 \leq s_i x^{-2/\alpha} \leq T_i \\ i=1, \dots, n}} |\tilde{\eta}(s_1 x^{-2/\alpha}, \dots, s_n x^{-2/\alpha})| > x \right\} < x^{n-2+2n/\alpha} \prod_{i=1}^n T_i e^{-x^{3/2} C^*},$$

s_i — целые.

Доказательство леммы следует из однородности случайного поля и неравенства

$$P\{|\tilde{\eta}(\bar{t})| > x\} \leq C x^{n-2} e^{-x^{3/2}}, \quad (3)$$

которое выполняется для всякого $\bar{t}$ при $x > 1$.

* В дальнейшем постоянные (возможно, различные), не зависящие от $x, T_1, \dots, T_n$, будем обозначать через C .

Лемма 2. Для рассматриваемого поля $\bar{\eta}(\bar{t})$ имеет место соотношение

$$P_2 = P \{ |\bar{\eta}(\bar{0})| < y; \bar{\eta}(\bar{t}) > y + h \} \leq \frac{C}{B} \iint_{\substack{R > y+h \\ \rho < y}} R^{n-1} \rho^{n-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\rho^2 + R^2 - 2\rho R}{(1 - r^2)} + A\delta\rho R \right\} d\rho dR, \quad (4)$$

где $\delta > 0$ не зависит от $\rho, R, y, h, \bar{t}$,

$$B = \sqrt{1 - B_{LL}^2(|\bar{t}|)} (\sqrt{1 - B_{NN}^2(|\bar{t}|)})^{n-1},$$

причем при $B_{LL}(|\bar{t}|) > B_{NN}(|\bar{t}|)$ $r = B_{NN}(|\bar{t}|)$;

$$A = Q = [B_{LL}(|\bar{t}|) - B_{NN}(|\bar{t}|)]/[1 + B_{LL}(|\bar{t}|)][1 + B_{NN}(|\bar{t}|)],$$

а при $B_{NN}(|\bar{t}|) > B_{LL}(|\bar{t}|)$ $r = B_{LL}(|\bar{t}|)$; $A = -Q$. Предполагается, что $y > 0$; $h > 0$; $B_{LL}(|\bar{t}|) > 0$; $B_{NN}(|\bar{t}|) > 0$.

Доказательство. Направим одну из координатных осей вдоль вектора $\bar{t}$, а другие — перпендикулярно ей. В такой системе координат $\eta_i(\bar{t}), \eta_j(\bar{0}), i \neq j$, — независимые гауссовские случайные величины и P_2 определится равенством

$$P_2 = \frac{1}{B} \int \dots \int_{\substack{\sum_{i=1}^n x_i^2 > (y+h)^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i^2 < y^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2 + t_1^2 - 2B_{LL}(|\bar{t}|) x_1 t_1}{1 - B_{LL}^2(|\bar{t}|)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\sum_{i=2}^n (x_i^2 + t_i^2 - 2B_{NN}(|\bar{t}|) x_i t_i)}{1 - B_{NN}^2(|\bar{t}|)} \right] \right\} dx_1 \dots dx_n dt_1 \dots dt_n.$$

Производя замену переменных

$$x_1 = x; x_2 = x \cos \Phi_1; x_3 = x \sin \Phi_1 \cos \Phi_2; \dots; x_n = x \sin \Phi_1 \dots \sin \Phi_{n-2};$$

$$t_1 = t; t_2 = t \cos \Phi_1; t_3 = t \sin \Phi_1 \cos \Phi_2; \dots; t_n = t \sin \Phi_1 \dots \sin \Phi_{n-2}$$

и некоторые преобразования, получаем

$$P_2 \leq \frac{1}{B} \iiint_{x^2 + x_1^2 > (y+h)^2} x^{n-2} t^{n-2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2 + t_1^2 - 2B_{LL}(|\bar{t}|) x_1 t_1}{1 - B_{LL}^2(|\bar{t}|)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{x^2 + t^2 - 2B_{NN}(|\bar{t}|) xt}{1 - B_{NN}^2(|\bar{t}|)} \right] \right\} dx dx_1 dt dt_1.$$

Положив при $B_{NN}(|\bar{t}|) > B_{LL}(|\bar{t}|)$

$$x = \frac{R\sqrt{2}}{2} (\cos \varphi + \sin \varphi); \quad x_1 = \frac{R\sqrt{2}}{2} (\cos \varphi - \sin \varphi);$$

$$t = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} (\cos \Phi + \sin \Phi); \quad t_1 = \frac{\rho\sqrt{2}}{2} (\cos \Phi - \sin \Phi),$$

получаем

$$P_2 \leq \frac{C}{B} \iint_{\substack{R > y+h \\ \rho < y}} \rho^{n-1} R^{n-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} N(\rho, R, |\bar{t}|) \right\} d\rho dR,$$

где

$$N = \frac{B_{NN}^2(|\bar{t}|) - B_{LL}^2(|\bar{t}|)}{[1 - B_{NN}^2(|\bar{t}|)][1 - B_{LL}^2(|\bar{t}|)]} [R \cos(\pi/4 - \varphi) - \rho \cos(\pi/4 - \Phi)]^2 + \\ + \frac{\rho^2 + R^2 - 2B_{LL}(|\bar{t}|) \rho R}{1 - B_{LL}^2(|\bar{t}|)} - 2A\delta\rho R.$$

Отсюда следует (4).

Лемма 3. Для всяких $\beta_1, \dots, \beta_n$, принимающих значения 0 или 1 и $\sum_{i=1}^n \beta_i > 0$ при больших x и при $1 > b > 0$

$$P \left\{ |\bar{\eta}(\bar{0})| < x - x^{-1}b^k; \left| \bar{\eta} \left(\frac{\beta_1 x^{-2/\alpha}}{2^{k+1}}, \dots, \frac{\beta_n x^{-2/\alpha}}{2^{k+1}} \right) \right| > x - x^{-1}b^{k+1} \right\} < Cx^{3n-4} e^{-x^{1/2}} A_2^n \exp \left(-\frac{A_1^2}{2} \right) \cdot 2^{1/2 \alpha (k+1)(n-2)},$$

где

$$C_1(b \cdot 2^{\alpha/2})^k < A_1 < C_2(b \cdot 2^{\alpha/2})^k.$$

Доказательство получаем из леммы 2, учитывая условия (1).

Лемма 4. При больших x

$$P \{ |\bar{\eta}(\bar{0})| \leq x; \max_{\substack{0 \leq t_i \leq x^{-2/\alpha} \\ i=1, \dots, n}} |\bar{\eta}(\bar{t})| > x \} < Cx^{3n-4} e^{-x^{1/2}}.$$

Доказательство проводится аналогично работе (3) с использованием лемм 2 и 3 и неравенства (3).

Лемма 5. При больших x и при $T_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$P_5 = P \left\{ \max_{\substack{0 \leq t_i \leq T_i \\ i=1, 2, \dots, n}} |\bar{\eta}(\bar{t})| > x \right\} \leq C e^{-x^{1/2}} x^{3n-4+2n/\alpha} \prod_{i=1}^n T_i. \quad (5)$$

Доказательство.

$$P_5 = [P_5 - P_1] + P_1.$$

Используя леммы 1 и 4, получим соотношение (5). Из (5) можно получить неравенство (2) таким же образом, как в (4, 5).

Замечание. Для скалярных нормальных действительных однородных случайных полей $\xi(\bar{t})$ справедлива

Теорема 2. Пусть $M\xi(\bar{t}) = 0$; $D\xi(\bar{t}) = 1$ и для корреляционной функции $r(\bar{t})$ при малых $|t_1|, \dots, |t_n|$ имеет место представление

$$1 - r(\bar{t}) \leq C \sum_{\substack{n \\ \sum_{i=1}^n m_i=1}} \prod_{i=1}^n |t_i|^{\alpha_i m_i}; \quad (6)$$

$$0 < \alpha_i \leq 2, \quad m_i \geq 0, \quad C = \text{const.}$$

(число слагаемых в сумме конечно).

Тогда для случайного поля $\xi(\bar{t})$ выполняется неравенство (2) с

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \varepsilon.$$

Аналогично (2) можно показать, что из (6) следует, что для $\xi(\bar{t})$ почти наверное выполнено условие Липшица $(C, \beta_1/2, \dots, \beta_n/2)$, $(\beta_i < \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n)$.

Научно-исследовательский институт
строительного производства
Госстроя СССР
Киев

Поступило
17 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. II, «Наука», 1967. ² М. П. Ядренко, Вісн. київ. унів. сер. мат. та мех., 9, 403 (1967). ³ James Pickands III, Trans. Am. Math. Soc., 145 (1969). ⁴ П. И. Юдицкая, ДАН, 194, № 2, 278 (1970). ⁵ П. И. Юдицкая, Сборн. Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, в. 3 (1970).