Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 519.33 + 519.272

МАТЕМАТИКА

В. И. АРКИН, В. Л. ЛЕВИН

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА С ФУНКЦИЯМИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ОПЕРАТОРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ: ПРИНЦИП МАКСИМУМА И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 3 III 1971)

1°. В заметке рассматривается следующая вариационная задача. Требуется максимизировать функционал

$$\Phi(\bar{u}) = \int_0^1\int_0^1 c(x, y, u(x, y))\, dx\, dy \tag{1}$$

при ограничениях

$$\int_0^1 f(x, y, u(x, y))\, dy = 0; \tag{2}$$

$$\int_0^1 g(x, y, u(x, y))\, dx = 0; \tag{3}$$

отображение $\bar{u} = u(x, y) : K \to U$ измеримо и

$$u(x, y) \in U(x, y) \tag{4}$$

для почти всех $(x, y) \in K$, где $K = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, U — полное сепарабельное метрическое пространство.

Для этой задачи устанавливается необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума (теорема 1). Существенной особенностью задачи (1) — (4) является ее бесконечномерность в том смысле, что левая часть ограничений (2), (3) есть оператор с бесконечномерной областью значений. В случае, когда U — множество на числовой прямой, а $c(x, y, u)$, $f(x, y, u)$, $g(x, y, u)$ линейно зависят от u, задача (1) — (4) близка к задаче о перемещении масс ([1]). В заключительной части заметки сформулирована теорема существования экстремали (теорема 2). В конечномерном случае аналогичная теорема существования доказана в ([2]).

2°. Рассмотрим задачу (1) — (4) и предположим, что множество

$$\{(x, y, u) \in K \times U : u \in U(x, y),\ (x, y) \in K\} \tag{5}$$

является аналитическим *, а функции $c(x, y, u)$, $f(x, y, u)$, $g(x, y, u)$ на $K \times U$ борелевские. Мы будем также считать, что ограничения (2) — (4) совместны, $c(x, y, u(x, y))$ суммируема для любого $\bar{u} = u(x, y)$, удовлетворяющего (4), а для f и g выполняется следующее более сильное условие: существуют функции $p(x, y)$, $q(x, y) \in L_1(K)$ такие, что почти всюду на K

$$\sup_{u \in U(x, y)} |f(x, y, u)| \leqslant p(x, y), \qquad \sup_{u \in U(x, y)} |g(x, y, u)| \leqslant q(x, y).$$

---

* Аналитическое множество — это непрерывный образ борелевского множества (см., например, ([3])).

Кроме этих основных предположений, обеспечивающих корректность постановки задачи (1) — (4), нам понадобится ряд дополнительных условий на f и g.

Будем называть отображение $\bar{u} = u(x, y)$ управлением, если оно удовлетворяет (4), и допустимым управлением, если оно удовлетворяет всем ограничениям (2) — (4).

Положим $r(x) = \int_0^1 p(x, y)\,dy$, $s(y) = \int_0^1 q(x, y)\,dx$ и рассмотрим условия.

($fg1$) Существуют управления $\bar{u}'$, $\bar{u}''$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$|f(x, y, u'(x, y)) - f(x, y, u''(x, y))| \geqslant \delta r(x)$$

для почти всех $(x, y) \in K$ и

$$\delta s(y) \leqslant \left|\int_0^1 [g(x, y, u'(x, y)) - g(x, y, u''(x, y))]\,[f(x, y, u'(x, y)) - f(x, y, u''(x, y))]^{-1} r(x)\,dx\right|$$

для почти всех $y \in [0, 1]$.

($fg2$) Существуют допустимые управления $\bar{v}'$, $\bar{v}''$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$|f(x, y, v'(x, y)) - f(x, y, v''(x, y))| \geqslant \delta r(x),$$
$$|g(x, y, v'(x, y)) - g(x, y, v''(x, y))| \leqslant \delta s(y)$$

почти всюду на K и функция

$$[g(x, y, x'(x, y)) - g(x, y, v''(x, y))] \times [f(x, y, v'(x, y)) - f(x, y, v''(x, y))]^{-1}$$

непредставима в виде произведения $A(x)B(y)$.

($fg3$) I) Почти всюду на K имеет место соотношение

$$g(x, y, u) - g(x, y, v) = k(x, y)\,[f(x, y, u) - f(x, y, v)]$$

для любых $u, v \in U(x, y)$;

II) существуют допустимые управления $\bar{v}'$, $\bar{v}''$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$|f(x, y, v'(x, y)) - f(x, y, v''(x, y))| \geqslant \delta r(x)$$

почти всюду на K и $\left|\int_0^1 k(x, y)\, r(x)\,dx\right| \geqslant \delta s(y)$ для почти всех $y \in [0, 1]$;

III) $p(x, y) \leqslant Cr(x)$ почти всюду на K, где $C < \infty$.

Условие I довольно специфично (оно выполняется в линейном случае, т. е. когда $U \subset R^1$ и $f(x, y, u) = f(x, y)u - a(x, y)$, $g(x, y, u) = g(x, y)u - b(x, y)$); остальные условия представляются нам не слишком ограничительными. Заметим, что из I, II ($fg3$) следует ($fg1$).

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — суммируемые функции. Положим

$$H(x, y, u) = c(x, y, u) + \frac{\varphi(x)}{r(x)} f(x, y, u) + \frac{\psi(y)}{s(y)} g(x, y, u).$$

Теорема 1. *Предположим, что выполняются либо условия* ($fg1$), ($fg2$), *либо условие* ($fg3$). *Пусть $\bar{u}^0 = u^0(x, y)$ — допустимое управление. Тогда для оптимальности $\bar{u}^0$ необходимо и достаточно существование суммируемых функций $\varphi(x)$, $\psi(y)$ таких, что на множестве полной меры в K выполняется принцип максимума*

$$H(x, y, u^0(x, y)) = \max_{u \in U(x, y)} H(x, y, u).$$

3°. Достаточность принципа максимума очевидна, причем без каких-либо дополнительных условий. Доказательство необходимости существенно использует результаты нашей заметки ([4]) и развитый А. Я. Дубовицким и А. А. Милютиным метод трансляции решений уравнения Эйлера ([5]).

Наметим план доказательства. Пусть ω — конечный набор управлений, включающий $\bar{u}^0, \bar{u}', \bar{u}'', \bar{v}', \bar{v}''$. Рассмотрим пространство E_ω — произведение $|\omega|$ экземпляров $L_\infty(K)$, где $|\omega|$ — число элементов ω. Обозначим $c_{\bar{u}}(x, y) = f(x, y, u(x, y))$, $f_{\bar{u}}(x, y) = c(x, y, u(x, y))$, $g_{\bar{u}}(x, y) = g(x, y, u(x, y))$ для всякого управления $\bar{u} = u(x, y)$. Свяжем с каждым набором ω линейную экстремальную задачу Z_ω, заключающуюся в максимизации функционала

$$\int_0^1\int_0^1 \sum_{\bar{u}\in\omega} c_{\bar{u}}(x, y)\,\alpha_{\bar{u}}(x, y)\,dx\,dy \tag{6}$$

при ограничениях на $\{\alpha_{\bar{u}}(x, y)\}_{\bar{u}\in\omega} \in E_\omega$:

$$\int_0^1 \sum_{\bar{u}\in\omega} f_{\bar{u}}(x, y)\,\alpha_{\bar{u}}(x, y)\,dy = 0; \tag{7}$$

$$\int_0^1 \sum_{\bar{u}\in\omega} g_{\bar{u}}(x, y)\,\alpha_{\bar{u}}(x, y)\,dx = 0; \tag{8}$$

$$\sum_{\bar{u}\in\omega} \alpha_{\bar{u}}(x, y) = 1; \tag{9}$$

$$\alpha_{\bar{u}}(x, y) \geqslant 0 \quad (\bar{u} \in \omega). \tag{10}$$

Очевидно, эта задача имеет решение. Из теоремы 1 в ([4]) следует, что максимальное значение (6) при ограничениях (7)—(10) равно $\Phi(\bar{u}^0)$ и достигается на векторе $\{\alpha^0_{\bar{u}}\}_{\bar{u}\in\omega} \in E_\omega$: $\alpha^0_{\bar{u}^0}(x, y) = 1$, $\alpha^0_{\bar{u}}(x, y) = 0$ $(\bar{u} \neq \bar{u}^0,\ \bar{u} \in \omega)$. Семейство задач Z_ω исследуется методом работы ([5]). При этом возникает задача нахождения аннулятора подпространства $E_{\omega 0} \subset E_\omega$, составленного из векторов $\{\alpha_{\bar{u}}(x, y)\}_{\bar{u}\in\omega}$, для которых левая часть (7) — (9) равна нулю.

Пусть $e(x, y) \in L_1(K)$ и $\int_0^1 |e(x, y)|\,dy \in L_\infty(X)$, $\int_0^1 |e(x, y)|\,dx \in L_\infty(Y)$, где X (Y) обозначает отрезок $[0, 1]$ на оси x (y). Пусть $\mathcal{F}_x \in L_\infty'(X)$, $\mathcal{G}_y \in L_\infty'(Y)$. Определим на $L_\infty(K)$ функционалы $e(x, y)\mathcal{F}_x$ и $e(x, y)\mathcal{G}_y$, полагая для любой функции $\alpha(x, y) \in L_\infty(K)$

$$\langle \alpha(x, y),\ e(x, y)\mathcal{F}_x\rangle = \left\langle \int_0^1 \alpha(x, y)\,e(x, y)\,dy,\ \mathcal{F}_x \right\rangle,$$

$$\langle \alpha(x, y),\ e(x, y)\mathcal{G}_y\rangle = \left\langle \int_0^1 \alpha(x, y)\,e(x, y)\,dx,\ \mathcal{G}_y \right\rangle.$$

Предложение. *Предположим, что выполнено условие (fg1). Тогда аннулятор $E_{\omega 0}$ есть подпространство E_ω', составленное из всевозможных функционалов вида $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{\bar{u}})_{\bar{u}\in\omega}$,*

$$\mathcal{L}_{\bar{u}} = \frac{f_{\bar{u}}(x, y)}{r(x)}\mathcal{F}_x + \frac{g_{\bar{u}}(x, y)}{s(y)}\mathcal{G}_y + \mathcal{H} \quad (\bar{u} \in \omega),$$

где $\mathcal{F}_x \in L_\infty'(X)$, $\mathcal{G}_y \in L_\infty'(Y)$, $\mathcal{H} \in L_\infty'(K)$.

Это предложение позволяет выписать общий вид решения уравнения Эйлера для задачи Z_ω. Далее удается показать, что предположения теоремы 1 обеспечивают выполнение условия транслируемости ([5]). Применяя теорему 6 работы ([5]), используя свойства функционалов на пространстве L_∞ (см. [6], § 4) и теорему измеримого выбора [3], получаем принцип максимума.

Замечание. Принцип максимума оказался одновременно необходимым и достаточным условием экстремума благодаря предположениям теоремы 1, исключающим вырожденный случай. По-видимому, необходимость имеет место и при менее сильных предположениях, если заменить $H(x, y, u)$ функцией

$$\mathscr{H}(x, y, u) = \lambda c(x, y, u) + \frac{\varphi(x)}{r(x)} f(x, y, u) + \frac{\psi(y)}{s(y)} g(x, y, u),$$

где $\lambda \geqslant 0$ (ср. с классическим принципом максимума Л. С. Понтрягина [7]).

4°. Теорема 2. *Пусть U — метрический компакт; $U(x, y)$ замкнуто в U для почти всех $(x, y) \in K$; множество (5) аналитическое; функции c, f, g на $K \times U$ борелевские. Предположим также, что функции $c(x, y, u)$, $f(x, y, u)$, $g(x, y, u)$ непрерывны на U для почти всех $(x, y) \in K$ и*

$$\max_{u \in U} |c(x, y, u)|, \quad \max_{u \in U} |f(x, y, u)|, \quad \max_{u \in U} |g(x, y, u)| \in L_1(K).$$

Тогда существует допустимое управление $\bar{u}^0 = u^0(x, y)$, на котором достигается максимум функционала $\Phi(\bar{u})$.

Замечание. Теорема 2 верна, если f и g — вектор-функции.

Лемма. *Пусть $\mu(x, y, du)$ — вероятностная мера на $U(x, y)$ для почти всех $(x, y) \in K$ и интегралы по μ от $c(x, y, u)$, $f(x, y, u)$, $g(x, y, u)$ суть измеримые функции на K. Пусть, кроме того, выполняются предположения теоремы 2.*

Тогда найдется управление $\bar{u} = u(x, y)$ такое, что

$$\int_0^1\int_0^1 c(x, y, u(x, y))\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1\int c(x, y, u)\,\mu(x, y, du)\,dx\,dy,$$

$$\int_0^1 f(x, y, u(x, y))\,dy = \int_0^1\int f(x, y, u)\,\mu(x, y, du)\,dy,$$

$$\int_0^1 g(x, y, u(x, y))\,dx = \int_0^1\int g(x, y, u)\,\mu(x, y, du)\,dx,$$

где внутренние интегралы в правой части берутся по $U(x, y)$.

Эта лемма является следствием теоремы 1 в [4].

Функции c, f, g являются элементами пространства $L_1(K, C(U))$ суммируемых вектор-функций на K со значениями в $C(U)$. Сопряженное пространство $L_1'(K, C(U))$ есть пространство непрерывных линейных отображений $(C(U) \to L_\infty(K))$ (см. [8]) или, что то же, $L_\infty(K)$-значных мер Радона на U [9]. Рассмотрим в нем подмножество мер $\mu(x, y, du)$, удовлетворяющих условиям: 1) $\mu(x, y, \cdot)$ — вероятностная мера на U для почти всех $(x, y) \in K$*; 2) $\mu(x, y, U \setminus U(x, y)) = 0$. Теорема 2 вытекает из бикомпактности этого множества в слабой топологии $\sigma(L_1'(K, C(U)), L_1(K, C(U)))$ и леммы.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, ДАН, 37, 7—8, 227 (1942). [2] В. И. Аркин, Кибернетика, 2, 87 (1967). [3] В. А. Рохлин, Математич. сборн., 25(67), 235 (1949). [4] В. И. Аркин, В. Л. Левин, ДАН, 200, № 1 (1971). [5] А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., в. 6, 1263 (1969). [6] А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Там же, 8, в. 4, 725 (1968). [7] Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1961. [8] A. Grothendieck, Memoirs Am. Math. Soc., 16 (1955). [9] Н. Бурбаки, Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления, «Наука», 1970.

* Скалярная мера $\mu(x, y, \cdot)$ имеет смысл, так как $C(U)$ сепарабельно и, следовательно, его образ в $L_\infty(K)$ — подъемное подпространство (см. [9], гл. VI, § 2, лемма 2).