Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 517.941 *МАТЕМАТИКА*

М. Г. ГАСЫМОВ

К ТЕОРИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ РЕГУЛЯРНОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 25 I 1971)

В данной работе для абстрактных дифференциальных уравнений порядка n по времени дается определение k-корректных задач, которые близки к корректным в смысле А. Н. Тихонова задачам [1], указываются классы k-корректных уравнений, находится связь между k-корректностью и задачей факторизации полиномиальных операторных пучков.

1. Пусть $A_1, \ldots, A_{n-1}$ и A являются линейными операторами в гильбертовом пространстве H. В дальнейшем предполагаем, что выполняются следующие условия:

a) A является замкнутым оператором в H с всюду плотной областью определения $D(A)$;

b) обратный оператор A^{-1} ограничен;

c) для любого вектора $u \in D(A^j)$

$$\|A_j u\| \leqslant c\|A^j u\| + b\|u\|$$

при некоторых $c \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

Рассмотрим полиномиальный пучок $P(\lambda) = \lambda^n E + \lambda^{n-1} A_1 + \ldots + A^n$, который при каждом λ является замкнутым оператором в $P(A^n)$. С этим полиномиальным пучком свяжем дифференциальное уравнение

$$P(i\, d/dt)u(t) = 0 \tag{1}$$

и будем рассматривать его в пространстве $L_2(0, \infty; H)$, элементы которого являются измеримыми в смысле Бохнера вектор-функциями со значениями в H, и если $u(t) \in L_2(0, \infty; H)$, то норма определяется формулой

$$\|u(t)\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_H^2\, dt\right)^{1/2}.$$

Определение 1. Вектор-функция $u(t)$ называется регулярным решением уравнения (1), если выполняются следующие условия:

a) $u(t) \in L_2(0, \infty; H)$;

b) $u(t)$ имеет сильно непрерывные производные до $(n-1)$ порядка включительно при $t > 0$;

c) при любом t из $(0, \infty)$ вектор $u^{(j)}(t) \in D(A^{n-j})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$;

d) $P(i\, d/dt)u(t) \equiv 0$ при $t > 0$;

e) $u^{(j)}(+0) \in D(A^{n-j-1})$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Теперь присоединим к уравнению (1) начальные условия

$$u_t^{(j)}(0) = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{2}$$

Определение 2. Уравнение (1) при начальных условиях (2) назовем k-корректной задачей, если при любом наборе векторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$, где $\varphi_j \in D(A^{n-j-1})$, уравнение (1) имеет единственное регулярное решение $u(t)$ такое, что

a) $u^{(j)}(+0)=\varphi_j, \quad j=0,1,\ldots,k-1;$

b) $\| A^{n-j-1}u^{(j)}(t)\|_H \leqslant C\sum\limits_{s=0}^{k-1}\| A^{n-s-1}\varphi_s\|_H,$

где $j=0,1,\ldots,n-1$, $c>0$.

Аналогично можно дать определение k-корректной задачи, поставленной для неоднородного уравнения $P(i\,d/dt)u(t)=f(t)$. Однако в этой работе мы ограничиваемся однородной задачей.

Приведем некоторые классы уравнений, для которых задача (1), (2) будет k-корректной.

Теорема 1. *Пусть A является нормальным оператором с дискретным спектром $\{s_m\}$. Пусть аналитические функции $f_1(s)$, $f_2(s),\ldots$ $\ldots,f_{n-1}(s)$ такие, что корни характеристического уравнения*

$$P(i\lambda,\ s)=(i\lambda)^n+f_1(s_m)(i\lambda)^{n-1}+\ldots+f_{n-1}(s_m)(i\lambda)+s_m{}^n$$

распадаются на две группы $\lambda_1(m),\ldots,\lambda_k(m)$ и $\lambda_{k+1}(m),\ldots,\lambda_n(m)$ так, что при некотором $\varepsilon>0$ имеет место

$$\pi/2+\varepsilon\leqslant\arg\lambda_j(m)\leqslant 3\pi/2-\varepsilon,\quad j=1,\ldots,k,$$

$$-\pi/2+\varepsilon\leqslant\arg\lambda_j(m)\leqslant\pi/2-\varepsilon,\quad j=k+1,\ldots,m,$$

и

$$\varliminf_{m\to\infty}|\lambda_{j_1}(m)-\lambda_{j_2}(m)|\geqslant\alpha>0,\quad j_1\neq j_2.$$

Тогда если полагать $A_j=f_j(A)$, то задача (1), (2) *является k-корректной и ее решение $u(t)$ представляется в виде*

$$u(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}\{P^{-1}(i\lambda,\ s_m)\,Q(\lambda,\ s_m)\}|_{s=\lambda_j(m)}e^{\lambda_j(m)t},$$

где $Q_j(\lambda,\ s)$ определенным образом выражается через данные задачи.

Заметим, что в формулировке теоремы можно отказаться от условия дискретности спектра. Однако в этом случае соответствующие изменения в формулировке громоздкие и поэтому мы ограничились данным случаем.

Замечание 1. В этой теореме условие нормальности оператора A можно заменить другими условиями. Например, если оператор имеет дискретный спектр и система из собственных и присоединенных векторов его образует базис в H, то утверждение теоремы остается в силе. Иногда, можно полагать, что A является спектральным в смысле Данфорда оператором.

Когда пучок $P(\lambda)=\sum\limits_{q=0}^{n}a_q\lambda^qE+L$, где $a_0,\ldots,a_n$ — постоянные числа, а L — самосопряженный эллиптический оператор, задача (1), (2) подробно исследована в работе Ю. А. Дубинского ([2]). Первые работы в этом направлении для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами принадлежат Г. В. Дикополову, В. П. Паломодову и Г. Е. Шилову (см. ([3])).

В теореме 1 операторы $A_1,\ldots,\ A_{n-1}$, A перестановочны между собой. Однако можно указать класс полиномиальных пучков, в которых операторы $A_1,\ldots,A_{n-1}$, A могут быть неперестановочными между собой и задача (1), (2) является k-корректной.

Определение 3. Скажем, что $u(t)$ принадлежит множеству $D_{2k}(P_0)$, если $u(t)\in L_2(0,\infty;H)$ и обладает свойствами:

a) $u(t),\ldots,u^{(2k-1)}(t)$ сильно непрерывны на $[0,\infty)$;

b) $u^{(j)}(t)\in D(A^{n-j})$ при $t>0$ и $j=0,\ldots,2k-1$;

c) $\lim u^{(j)}(t) = 0, j = 0, \ldots, k-1$;

d) $P_0(i\,d/dt)f(t) = \{(-1)^k(d/dt)^{2k} + A^{2k}\}u(t) \in L_2(0, \infty; H)$;

e) $u^{(j)}(+0) \in D(A^{n-j-1}), j = 0, \ldots, n-1$.

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

a) *при каждом вещественном* λ *оператор* $P(\lambda)$ *является положительным оператором в* H;

b) *если* $\|A_jA^{-j}\| = \alpha_j$, *то*

$$\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\left(\frac{j}{n-j}\right)^{j/n}\frac{n-j}{n-j+1} < 1$$

или операторы A^{-1} *и* A_jA^{-j} *являются вполне непрерывными в* H;

c) *для всех* $u(t)$ *из* $D_{2k}(P_0)$ *имеет место неравенство*

$\|[P(i\,d/dt) - P_0(i\,d/dt)]u(t)\|_{L_2} \leqslant a\|P_0(i\,d/dt)u(t)\|_{L_2} + b\|u(t)\|_{L_2}$, *где* $a < 1$ *и* $b \geqslant 0$.

Тогда $n = 2k$ *и задача* (1), (2) *является* k*-корректной.*

Заметим, что при условиях теоремы дифференциальные выражения $P(i\,d/dt)$ и $P_0(i\,d/dt)$ порождают симметрические положительно определенные в $L_2(0, \infty; H)$ операторы P и P_0, область определения которых совпадает с $D_{2k}(P_0)$. Их самосопряженные расширения $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_0$ определены в одной и той же области. Поэтому уравнение $Pu = f(t)$ имеет единственное решение при любом $f(t)$ из $L_2(0, \infty; H)$. Из этого факта нетрудно вывести k-корректность задачи (1), (2).

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

a) *оператор* A *является положительным оператором в* H;

b) *имеет место условие* b) *теоремы* 2;

c) *имеет место условие* c) *теоремы* 2 *при* $b = 0$.

Тогда при $n = 2k$ *задача* (1), (2) *является* k*-корректной.*

Заметим, что в этой теореме операторы $A_1, \ldots, A_{n-1}$ могут быть и несамосопряженными.

Определение 4. Говорят, что операторный пучок $P(\lambda)$ допускает k-факторизацию, если существуют два операторных пучка

$$P_-(\lambda) = \lambda^k E + \lambda^{k-1}B_1 + \ldots + B_k,$$

$$P_+(\lambda) = \lambda^{n-k}E + \lambda^{n-k-1}C_1 + \ldots + C_{n-k},$$

которые обладают следующими свойствами:

a) при каждом λ пучки $P_-(\lambda)$ и $P_+(\lambda)$ являются замкнутыми операторами в $D(B_k) \subseteq D(A^k)$ и $D(C_{n-k}) \subseteq D(A^{n-k})$;

b) $P(\lambda) = P_+(\lambda)P_-(\lambda)$;

c) спектры пучков $P_-(\lambda)$ и $P_+(\lambda)$ лежат в нижней и в верхней полуплоскостях соответственно.

Теорема 3. *Если задача* (1), (2) *является* k*-корректной и на мнимой оси*

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leqslant c/(1 + |\lambda|^n),$$

то пучок $P(\lambda)$ *допускает единственную* k*-факторизацию.*

Наметим краткое формальное доказательство теоремы. Обозначим через $u_j(t)\varphi_j$ регулярное решение уравнения $P(i\,d/dt)u(t) = 0$ с начальными условиями

$$(u_j(t)\varphi_j)^{(s)}|_{t=0} = \delta_{sj}\varphi_j, \quad s, j = 0, \ldots, k-1.$$

Нетрудно доказать, что существуют операторы $B_1, \ldots, B_k$ такие, что

$P_-(i\,d/dt)u_j\varphi_j = \{(i\,d/dt)^k + (i\,d/dt)^{k-1}B_1 + \ldots + B_k\}u_j(t)\varphi_j \equiv 0$.

Тогда с помощью преобразования Лапласа получаем, с одной стороны,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} P^{-1}(\lambda)\sum_{j=0}^{k-1} Q_j(\lambda)\varphi_j e^{\lambda t}d\lambda,$$

а, с другой стороны,

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} P_-^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^{k-1} R_j(\lambda) \varphi_j e^{\lambda t} \, d\lambda.$$

Здесь $Q_j(\lambda)$ и $R_j(\lambda)$ являются полиномиальными пучками, причем $Q_{k-1}(\lambda)$ имеет порядок, равный $n-k$, а $R_{k-1} = E$. Поэтому из сравнения двух последних формул вытекает, что

$$P^{-1}(\lambda) Q_{k-1}(\lambda) = P_-^{-1}(\lambda).$$

Отсюда, полагая $Q_{k-1}(\lambda) = P_+(\lambda)$, имеем $P(\lambda) = P_+(\lambda) P_-(\lambda)$, что дает факторизацию пучка $P(\lambda)$.

При некоторых условиях из существования k-факторизации для $P(\lambda)$ вытекает k-корректность задачи (1), (2). Например, это имеет место, если $A_1, \ldots, A_{n-1}, A$ являются ограниченными операторами.

Заметим, что при условиях теорем 1, 2 и 3 пучок $P(\lambda)$ допускает k-факторизацию *.

Факторизация квадратичных положительных пучков во многих случаях с дискретным спектром приведена в ([4]) (см. также ([5]) и ([6], [7])).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 153, № 1, 49 (1963). [2] Ю. А. Дубинский, Тр. Московск. Матем. общ., 20, 205 (1969). [3] Г. Е. Шилов, Математический анализ (второй специальный курс), «Наука», 1965. [4] М. Г. Крейн, Г. К. Крейн, ДАН, 154, № 6, 1258 (1964). [5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов, М., 1965. [6] И. В. Горюк, Вестн. Московск. унив., № 1, 55 «Наука». [7] И. В. Горюк, Вестн. Московск. унив., № 5, 28 (1970).

* В частном письме А. Г. Костюченко сообщил автору, что им также получены теоремы о факторизации некоторых положительных и других операторных пучков порядка $2k$.