УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_31
EDN: RTQKOE

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ В ТЕРМОРАДИАЦИОННОМ ПОЛЕ

А.С. Мельникова

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

DEFORMATION OF ELASTOPLASTIC RECTANGULAR THREE-LAYER PLATE WITH COMPRESSIBLE FILLER IN THERMORADIATION FIELD

A.S. Melnikova

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Аннотация. Исследовано деформирование несимметричных по толщине упругопластических трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем при действии терморадиационных нагрузок. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Получена система уравнений равновесия и ее аналитическое решение в перемещениях.

Ключевые слова: *пластичность*, *трехслойная прямоугольная пластина*, *терморадиационная нагрузка*, *сжимаемый заполнитель.*

Для цитирования: *Мельникова*, *А.С.* Деформирование упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в терморадиационном поле / А.С. Мельникова // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 31–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_31. – EDN: RTQKOE

Abstract. The deformation of asymmetrical in thickness elastioplastic three-layer plates with compressible filler under the action of thermoradiation loads is investigated. Kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: for the outer layers, Kirchhof's hypotheses are accepted, in a rigid compressible filler the deformed normal remains rectilinear. At the contact boundaries, the conditions of continuity of displacements are used. A system of equilibrium equations and its analytical solution in displacements are obtained.

Keywords: *plasticity*, *three-layer rectangular plate*, *thermal radiation load*, *compressible filler.*

For citation: *Melnikova*, *A.S.* Deformation of elastoplastic rectangular three-layer plate with compressible filler in thermoradiation field / A.S. Melnikova // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 31–36. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_31 (in Russian). – EDN: RTQKOE

Введение

В современном мире сложно представить отрасли промышленности, где не нашлось бы применение трехслойных конструкций, так, например, в строительстве широкое распространение получили сэндвич панели, в авиастроении трехслойные конструкции используются в качестве покрытия самолетов и космических аппаратов, в судостроении – покрытия бортов. Трехслойные конструкции позволяют достичь существенного снижения массы и повышения жесткости. Постепенно повышаются и требования по прочности и весу, чтобы сделать использование таких конструкций ещё более эффективным. В связи с этим возникает необходимость разработки новых и уточнения уже существующих методов их расчета.

В монографиях [1]–[3] приведены различные кинематические и математические модели деформирования трехслойных инженерных конструкций. В публикациях [4]–[8] рассмотрено поведение слоистых конструкций при воздействии на них температуры. Деформирование круглых пластин при воздействии на них нейтронного потока представлено в работах [9]–[10]. В [11] проведен анализ напряженного состояния в слоистом теле при взаимодействии цилиндрического индентора с упругим покрытием. В работах [12]–[14] исследовано динамическое воздействие на неоднородные элементы конструкций. Здесь выполнена постановка и решение задачи о деформировании упругопластической прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в терморадиационном поле.

1 Постановка краевой задачи

Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя. Постановка задачи дается в прямоугольной

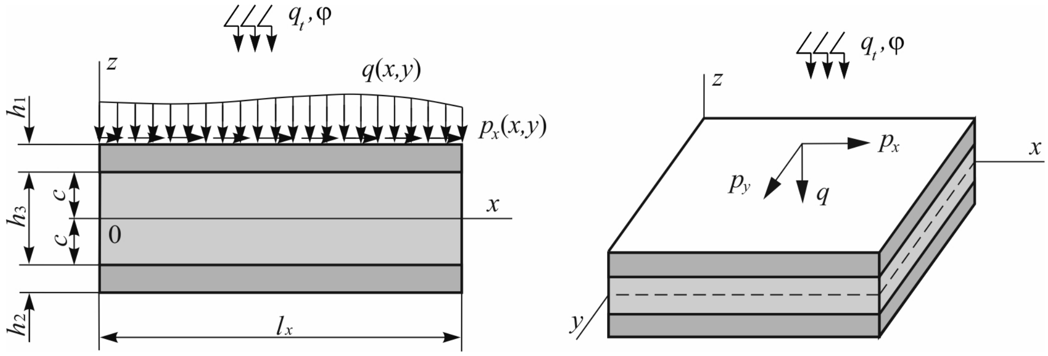

Рисунок 1.1 – Расчетная схема пластины

системе координат, где ось x проходит вдоль срединной плоскости заполнителя (рисунок 1.1).

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

2 Решение краевой задачи

Упругопластическая пластина находится в температурном поле $T_k(z)$ (k – номер слоя) и облучается нейтронным потоком $I = \varphi t$ (φ – интенсивность потока в нейтрон/с, t – время). Допустим, что в начальный момент времени на трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, находящуюся в естественном состоянии, начинают действовать внешние распределенные нагрузки $q(x)$, $p_x(x)$.

В слоях используем физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций:

$$s_{ij}^{(k)} = 2G_k\left(T_k\right)\left(1-\omega^{(k)}\left(\varepsilon_u^{(k)}, T_k, I\right)\right)\text{э}_{ij}^{(k)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}\Delta T_k - BI)$$

$$(i, j = x, y, z,\ k = 1, 2, 3). \qquad (2.1)$$

Уравнения равновесия термоупругопластической пластины были получены ранее в [7]. Отличием является то, что здесь функция пластичности зависит не только от интенсивности деформаций и температуры, но также и от величины нейтронного потока $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k, I)$. Ее при $\varepsilon_u^{(k)} \le \varepsilon_{\text{т}}^{(k)}(T_k, I)$ следует положить равной нулю. Интегральный нейтронный поток в пределах малых доз облучения приводит к увеличению радиационного упрочнения материала и росту предела текучести. Радиационное увеличение объемной деформации учитывается величиной BI, где B – константа.

Исходя из соотношений (2.1) выделим в тензоре напряжений упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом «ω») слагаемые, которые будут включать и терморадиационные добавки:

– в несущих слоях

$$\sigma_{xx}^{(k)} = \sigma_{xx}^{(k)0} - \sigma_{xx}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)0} = K_k^{+}(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)} + K_k^{-}(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xx}^{(k)\omega} = \frac{2}{3}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{xx}^{(k)} - \varepsilon_{yy}^{(k)}\right)\omega^{(k)} +$$

$$+3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI,$$

$$\sigma_{yy}^{(k)} = \sigma_{yy}^{(k)0} - \sigma_{yy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)0} = K_k^{+}(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)} + K_k^{-}(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)},$$

$$\sigma_{yy}^{(k)\omega} = \frac{2}{3}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{yy}^{(k)} - \varepsilon_{xx}^{(k)}\right)\omega^{(k)} +$$

$$+3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k + BI,$$

$$\sigma_{xy}^{(k)} = \sigma_{xy}^{(k)0} - \sigma_{xy}^{(k)\omega},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)0} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xy}^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)},$$

$$\sigma_{xy}^{(k)\omega} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xy}^{(k)}\omega^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)};$$

– в заполнителе

$$\sigma_{xx}^{(3)} = \sigma_{xx}^{(3)0} - \sigma_{xx}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{xx}^{(3)0} = K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{yy}^{(3)} + \varepsilon_{zz}^{(3)}\right),$$

$$\sigma_{xx}^{(3)\omega} = \frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)} +$$

$$+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{yy}^{(3)} = \sigma_{yy}^{(3)0} - \sigma_{yy}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)0} = K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)} + K_3^{-}(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)} + K_3^{-}(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)},$$

$$\sigma_{yy}^{(3)\omega} = \frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)} +$$

$$+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{zz}^{(3)} = \sigma_{zz}^{(3)0} - \sigma_{zz}^{(3)\omega},$$

$$\sigma_{zz}^{(3)0} = K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)} + K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{xx}^{(3)} + \varepsilon_{yy}^{(3)}\right),$$

$$\sigma_{zz}^{(3)\omega} = \frac{2}{3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{zz}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\omega^{(3)} +$$

$$+3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI,$$

$$\sigma_{xy}^{(3)}=\sigma_{xy}^{(3)0}-\sigma_{xy}^{(3)\omega},$$
$$\sigma_{xy}^{(3)0}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)},\ \ \sigma_{xy}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)},$$
$$\sigma_{xz}^{(3)}=\sigma_{xz}^{(3)0}-\sigma_{xz}^{(3)\omega},\ \ \sigma_{xz}^{(3)0}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)},$$
$$\sigma_{xz}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)},\ \ \sigma_{yz}^{(3)}=\sigma_{yz}^{(3)0}-\sigma_{yz}^{(3)\omega},$$
$$\sigma_{yz}^{(3)0}=2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)},\ \ \sigma_{yz}^{(3)\omega}=2G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)},$$
$$K_k^{+}(T_k)=K_k(T_k)+\frac{4}{3}G_k(T_k),$$
$$K_k^{-}(T_k)=K_k(T_k)-\frac{2}{3}G_k(T_k). \qquad (2.2)$$

Проведем подобную (2.2) операцию с внутренними усилиями, получим

– в несущих слоях

$$N_{xx}^{(k)0}=\int_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)0}dz=\int_{h_k}\left(K_k^{+}(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}+K_k^{-}(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)}\right)dz,$$
$$N_{xx}^{(k)\omega}=\int_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)\omega}dz=\frac{2}{3}\int_{h_k}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{xx}^{(k)}-\varepsilon_{yy}^{(k)}\right)\omega^{(k)}dz+$$
$$+\int_{h_k}\left(3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k+BI\right)dz,$$
$$N_{yy}^{(k)0}=\int_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)0}dz=\int_{h_k}\left(K_k^{+}(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)}+K_k^{-}(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}\right)dz,$$
$$N_{yy}^{(k)\omega}=\int_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)\omega}dz=\frac{2}{3}\int_{h_k}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{yy}^{(k)}-\varepsilon_{xx}^{(k)}\right)\omega^{(k)}dz+$$
$$+\int_{h_k}\left(3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k+BI\right)dz,$$
$$M_{xx}^{(k)0}=\int_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)0}zdz=\int_{h_k}\left(K_k^{+}(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}+K_k^{-}(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)}\right)zdz,$$
$$M_{xx}^{(k)\omega}=\int_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)\omega}zdz=\frac{2}{3}\int_{h_k}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{xx}^{(k)}-\varepsilon_{yy}^{(k)}\right)\omega^{(k)}zdz+$$
$$+\int_{h_k}\left(3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T+BI\right)_k zdz,$$
$$M_{yy}^{(k)0}=\int_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)0}zdz=\int_{h_k}\left(K_k^{+}(T_k)\varepsilon_{yy}^{(k)}+K_k^{-}(T_k)\varepsilon_{xx}^{(k)}\right)zdz,$$
$$M_{yy}^{(k)\omega}=\int_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)\omega}zdz=\frac{2}{3}\int_{h_k}G_k(T_k)\left(2\varepsilon_{yy}^{(k)}-\varepsilon_{xx}^{(k)}\right)\omega^{(k)}zdz+$$
$$+\int_{h_k}\left(3K_k(T_k)\alpha_{0k}\Delta T_k+BI\right)zdz,$$
$$M_{xy}^{(k)0}=\int_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)0}zdz=2\int_{h_k}G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}zdz,$$
$$M_{xy}^{(k)\omega}=\int_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)\omega}zdz=2\int_{h_k}G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)}zdz,$$
$$Q_{xy}^{(k)0}=\int_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)0}dz=2\int_{h_k}G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}dz,$$
$$Q_{xy}^{(k)\omega}=\int_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)\omega}dz=2\int_{h_k}G_k(T_k)\varepsilon_{xy}^{(k)}\omega^{(k)}dz;$$

– в заполнителе

$$N_{xx}^{(3)0}=\int_{h_3}\sigma_{xx}^{(3)0}dz=$$
$$=\int_{h_3}\left(K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{yy}^{(3)}+\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\right)dz,$$
$$N_{xx}^{(3)\omega}=\int_{h_3}\sigma_{xx}^{(3)\omega}dz=$$
$$=\frac{2}{3}\int_{h_3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{yy}^{(3)}-\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)}dz+$$
$$+\int_{h_3}\left(3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3+BI\right)dz,$$
$$N_{yy}^{(3)0}=\int_{h_3}\sigma_{yy}^{(3)0}dz=$$
$$=\int_{h_3}\left(K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\right)dz,$$
$$N_{yy}^{(3)\omega}=\int_{h_3}\sigma_{yy}^{(3)\omega}dz=$$
$$=\frac{2}{3}\int_{h_3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{yy}^{(3)}-\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)}dz+$$
$$+\int_{h_3}\left(3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3+BI\right)dz,$$
$$N_{zz}^{(3)0}=\int_{h_3}\sigma_{zz}^{(3)0}dz=$$
$$=\int_{h_3}\left(K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{zz}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\right)dz,$$
$$N_{zz}^{(3)\omega}=\int_{h_3}\sigma_{zz}^{(3)\omega}dz=$$
$$=\frac{2}{3}\int_{h_3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{zz}^{(3)}-\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{yy}^{(3)}\right)\omega^{(3)}dz+$$
$$+\int_{h_3}\left(3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3+BI\right)dz,$$
$$M_{xx}^{(3)0}=\int_{h_3}\sigma_{xx}^{(3)0}zdz=$$
$$=\int_{h_3}\left(K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{xx}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{yy}^{(3)}+\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\right)zdz,$$
$$M_{xx}^{(3)\omega}=\int_{h_3}\sigma_{xx}^{(3)\omega}zdz=$$
$$=\frac{2}{3}\int_{h_3}G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{xx}^{(3)}-\varepsilon_{yy}^{(3)}-\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)}zdz+$$
$$+\int_{h_3}\left(3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3+BI\right)zdz,$$
$$M_{yy}^{(3)0}=\int_{h_3}\sigma_{yy}^{(3)0}zdz=$$
$$=\int_{h_3}\left(K_3^{+}(T_3)\varepsilon_{yy}^{(3)}+K_3^{-}(T_3)\left(\varepsilon_{xx}^{(3)}+\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\right)zdz,$$

$$M_{yy}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{yy}^{(3)\omega} z dz =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{h_3} G_3(T_3)\left(2\varepsilon_{yy}^{(3)} - \varepsilon_{xx}^{(3)} - \varepsilon_{zz}^{(3)}\right)\omega^{(3)} z dz +$$

$$+\int_{h_3}\left(3K_3(T_3)\alpha_{03}\Delta T_3 + BI\right) z dz,$$

$$M_{xy}^{(3)0} = \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)0} z dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)} z dz,$$

$$M_{xy}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)\omega} z dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)} z dz,$$

$$M_{xz}^{(3)0} = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} z dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)} z dz,$$

$$M_{xz}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} z dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)} z dz,$$

$$M_{yz}^{(3)0} = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)0} z dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)} z dz,$$

$$M_{yz}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)\omega} z dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)} z dz,$$

$$Q_{xy}^{(3)0} = \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)0} dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)} dz,$$

$$Q_{xy}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{xy}^{(3)\omega} dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xy}^{(3)}\omega^{(3)} dz,$$

$$Q_{xz}^{(3)0} = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)0} dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)} dz,$$

$$Q_{xz}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{xz}^{(3)}\omega^{(3)} dz,$$

$$Q_{yz}^{(3)0} = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)0} dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)} dz,$$

$$Q_{yz}^{(3)\omega} = \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)\omega} dz = 2\int_{h_3} G_3(T_3)\varepsilon_{yz}^{(3)}\omega^{(3)} dz. \quad (2.3)$$

Обобщенные усилия также разбиваются на линейные и нелинейные слагаемые. Система уравнений равновесия в обобщенных усилиях и силовые граничные условия приводятся к виду, совпадающему с [7], только входящие в них дополнительные составляющие (с индексом «ω») вычисляются через напряжения и деформации по формулам (2.3), учитывающими и нейтронный поток. Подставив в уравнения равновесия в обобщенных усилиях выражения линейных и нелинейных составляющих внутренних усилий через искомые функции u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y}, w_1, w_2 получим систему нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, описывающую изгиб упругопластической пластины в терморадиационном поле. Система уравнений в итерационном виде выглядит следующим образом

$$a_1u_{1x}^n - a_1u_{2x}^n - a_4u_{1x}^n,_{xx} - a_5u_{2x}^n,_{xx} - a_{19}u_{1x}^n,_{yy} -$$
$$- a_{18}u_{2x}^n,_{yy} - a_{21}u_{1y}^n,_{xy} - a_{23}u_{2y}^n,_{xy} +$$
$$+ a_2w_1^n,_x + a_3w_2^n,_x - 2a_{24}w_1^n,_{xyy} +$$
$$+ a_{25}w_2^n,_{xyy} - 2a_6w_1^n,_{xxx} + a_7w_2^n,_{xxx} = p_x + p_\omega^{n-1},$$
$$- a_1u_{1x}^n + a_1u_{2x}^n - a_5u_{1x}^n,_{xx} - a_9u_{2x}^n,_{xx} - a_{18}u_{1x}^n,_{yy} -$$
$$- a_{20}u_{2x}^n,_{yy} - a_{23}u_{1y}^n,_{xy} - a_{22}u_{2y}^n,_{xy} - a_{10}w_1^n,_x -$$
$$- a_{17}w_2^n,_x - a_{24}w_1^n,_{xyy} + 2a_{25}w_2^n,_{xyy} -$$
$$- a_6w_1^n,_{xxx} + 2a_7w_2^n,_{xxx} = s_\omega^{n-1},$$
$$a_1u_{1y}^n - a_1u_{2y}^n - a_4u_{1y}^n,_{yy} - a_5u_{2y}^n,_{yy} - a_{19}u_{1y}^n,_{xx} -$$
$$- a_{18}u_{2y}^n,_{xx} - a_{21}u_{1x}^n,_{xy} - a_{23}u_{2x}^n,_{xy} + a_2w_1^n,_y +,$$
$$+ a_3w_2^n,_y - 2a_{24}w_1^n,_{xxy} + a_{25}w_2^n,_{xxy} -$$
$$- 2a_6w_1^n,_{yyy} + a_7w_2^n,_{yyy} = p_y + h_\omega^{n-1},$$
$$- a_1u_{1y}^n + a_1u_{2y}^n - a_5u_{1y}^n,_{yy} - a_9u_{2y}^n,_{yy} - a_{18}u_{1y}^n,_{xx} -$$
$$- a_{20}u_{2y}^n,_{xx} - a_{23}u_{1x}^n,_{xy} - a_{22}u_{2x}^n,_{xy} - a_{10}w_1^n,_y -$$
$$- a_{17}w_2^n,_y - a_{24}w_1^n,_{xxy} + 2a_{25}w_2^n,_{xxy} -$$
$$- a_6w_1^n,_{yyy} + 2a_7w_2^n,_{yyy} = r_\omega^{n-1},$$
$$- a_2u_{1x}^n,_x - a_2u_{1y}^n,_y + a_{10}u_{2x}^n,_x + a_{10}u_{2y}^n,_y +$$
$$+ 2a_6u_{1x}^n,_{xxx} + a_6u_{2x}^n,_{xxx} + 2a_6u_{1y}^n,_{yyy} + a_6u_{2y}^n,_{yyy} +$$
$$+ 2a_{24}u_{1x}^n,_{xyy} + a_{24}u_{2x}^n,_{xyy} + 2a_{24}u_{1y}^n,_{xxy} +$$
$$+ a_{24}u_{2y}^n,_{xxy} + a_{11}w_1^n,_{xx} + a_{11}w_1^n,_{yy} - a_{12}w_2^n,_{xx} -$$
$$- a_{12}w_2^n,_{yy} + a_{15}w_1^n,_{xxxx} + a_{15}w_1^n,_{yyyy} - a_{16}w_2^n,_{xxxx} -$$
$$- a_{16}w_2^n,_{yyyy} + a_{26}w_1^n,_{xxyy} - a_{28}w_2^n,_{xxyy} +$$
$$+ a_8w_1^n - a_8w_2^n = q + 0,5p_x,_x h_1 + 0,5p_y,_y h_1 + q_\omega^{n-1},$$
$$- a_3u_{1y}^n,_y - a_3u_{1x}^n,_x + a_{17}u_{2y}^n,_y + a_{17}u_{2x}^n,_x -$$
$$- a_7u_{1y}^n,_{yyy} - a_7u_{1x}^n,_{xxx} - 2a_7u_{2y}^n,_{yyy} - 2a_7u_{2x}^n,_{xxx} -$$
$$- 2a_{27}u_{2y}^n,_{xxy} - a_{25}u_{1y}^n,_{xxy} - 2a_{25}u_{2x}^n,_{xyy} -$$
$$- a_{25}u_{1x}^n,_{xyy} - a_{12}w_1^n,_{xx} - a_{12}w_1^n,_{yy} + a_{14}w_2^n,_{xx} +$$
$$+ a_{14}w_2^n,_{yy} - a_{16}w_1^n,_{xxxx} - a_{16}w_1^n,_{yyyy} + a_{13}w_2^n,_{xxxx} +$$
$$+ a_{13}w_2^n,_{yyyy} - a_{28}w_1^n,_{xxyy} + a_{27}w_2^n,_{xxyy} -$$
$$- a_8w_1^n + a_8w_2^n = g_\omega^{n-1}, \quad (2.4)$$

где n – номер приближения.

Дополнительные нагрузки с индексом «ω» включают все нелинейные и терморадиационные добавки

$$p_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)},_y - P_{1x}^{\omega(n-1)},_x,$$
$$s_\omega^{n-1} = H_{1x}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)},_y + P_{2x}^{\omega(n-1)},_x,$$
$$h_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} - V_1^{\omega(n-1)},_x - P_{1y}^{\omega(n-1)},_y,$$
$$r_\omega^{n-1} = H_{1y}^{\omega(n-1)} + V_2^{\omega(n-1)},_x + P_{2y}^{\omega(n-1)},_y,$$
$$q_\omega^{n-1} = S_{1x}^{\omega(n-1)},_{xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_{1x}^{\omega(n-1)},_x -$$

$$-U_1^{\omega(n-1)},_{xy}+S_{1y}^{\omega(n-1)},_{yy}-T_{1y}^{\omega(n-1)},_y,$$

$$g_\omega^{n-1}=S_{2x}^{\omega(n-1)},_{xx}-H_2^{\omega(n-1)}-T_{2x}^{\omega(n-1)},_x-$$
$$-U_2^{\omega(n-1)},_{xy}+S_{2y}^{\omega(n-1)},_{yy}-T_{2y}^{\omega(n-1)},_y. \qquad (2.5)$$

Обобщенные усилия в (2.5) зависят от внутренних усилий и выражаются следующим образом

$$H_{1x}^{\omega(n-1)}=\frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},\quad H_{1y}^{\omega(n-1)}=\frac{Q_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$H_2^{\omega(n-1)}=\frac{N_{zz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$P_{1x}^{\omega(n-1)}=\frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2}+\frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}+N_{xx}^{(1)\omega(n-1)},$$

$$P_{2x}^{\omega(n-1)}=\frac{N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2}-\frac{M_{xx}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}+N_{xx}^{(2)\omega(n-1)},$$

$$P_{1y}^{\omega(n-1)}=\frac{N_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2}+\frac{M_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}+N_{yy}^{(1)\omega(n-1)},$$

$$P_{2y}^{\omega(n-1)}=\frac{N_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2}-\frac{M_{yy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}+N_{yy}^{(2)\omega(n-1)},$$

$$V_1^{\omega(n-1)}=\frac{Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2}+\frac{M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}+Q_{xy}^{(1)\omega(n-1)},$$

$$V_2^{\omega(n-1)}=\frac{Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2}-\frac{M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}+Q_{xy}^{(2)\omega(n-1)},$$

$$S_{1x}^{\omega(n-1)}=\left(c+\frac{h_1}{2}\right)N_{xx}^{(1)\omega(n-1)}-M_{xx}^{(1)\omega(n-1)}+$$
$$+\frac{h_1}{4}N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}+\frac{h_1}{4c}M_{xx}^{(3)\omega(n-1)},$$

$$S_{2x}^{\omega(n-1)}=-\left(c+\frac{h_2}{2}\right)N_{xx}^{(2)\omega(n-1)}-M_{xx}^{(2)\omega(n-1)}-$$
$$-\frac{h_2}{4}N_{xx}^{(3)\omega(n-1)}+\frac{h_2}{4c}M_{xx}^{(3)\omega(n-1)},$$

$$S_{1y}^{\omega(n-1)}=\left(c+\frac{h_1}{2}\right)N_{yy}^{(1)\omega(n-1)}-M_{yy}^{(1)\omega(n-1)}+$$
$$+\frac{h_1}{4}N_{yy}^{(3)\omega(n-1)}+\frac{h_1}{4c}M_{yy}^{(3)\omega(n-1)},$$

$$S_{2y}^{\omega(n-1)}=-\left(c+\frac{h_2}{2}\right)N_{yy}^{(2)\omega(n-1)}-M_{yy}^{(2)\omega(n-1)}-$$
$$-\frac{h_2}{4}N_{yy}^{(3)\omega(n-1)}+\frac{h_2}{4c}M_{yy}^{(3)\omega(n-1)},$$

$$T_{1x}^{\omega(n-1)}=\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)\frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2}+\frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$T_{2x}^{\omega(n-1)}=\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)\frac{Q_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2}-\frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$T_{1y}^{\omega(n-1)}=\left(1+\frac{h_1}{2c}\right)\frac{Q_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2}+\frac{M_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$T_{2y}^{\omega(n-1)}=\left(1+\frac{h_2}{2c}\right)\frac{Q_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2}-\frac{M_{yz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c},$$

$$U_1^{\omega(n-1)}=\left(2c+h_1\right)Q_{xy}^{(1)\omega(n-1)}-2M_{xy}^{(1)\omega(n-1)}+$$
$$+\frac{h_1}{4}Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)}+\frac{h_1}{2c}M_{xy}^{(3)\omega(n-1)},$$

$$U_2^{\omega(n-1)}=\left(2c+h_2\right)Q_{xy}^{(2)\omega(n-1)}+2M_{xy}^{(2)\omega(n-1)}+$$
$$+\frac{h_2}{4}Q_{xy}^{(3)\omega(n-1)}-\frac{h_2}{2c}M_{xy}^{(3)\omega(n-1)}.$$

В дополнительных нагрузках (2.5) на первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации. Первым приближением будет служить аналитическое решение задачи упругости.

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения сводить задачу об упругопластическом изгибе рассматриваемой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем в терморадиационном поле к соответствующей задаче теории упругости с дополнительными нагрузками.

В качестве граничных условий примем кинематические условия свободного опирания пластины на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Искомое решение можно представить в тригонометрических рядах. Также в тригонометрические ряды разлагается поперечная нагрузка и дополнительные усилия. Подставляя их в уравнения равновесия, получим для вычисления искомых амплитуд перемещений U_{1xpm}^n, U_{2xpm}^n, U_{1ypm}^n, U_{2ypm}^n, W_{1pm}^n, W_{2pm}^n систему линейных алгебраических уравнений. Отличие здесь в нелинейных добавках, которые и учитывают влияние нейтронного облучения:

$$b_1U_{1xpm}^n+b_2U_{2xpm}^n+b_{11}U_{1ypm}^n+b_{12}U_{2ypm}^n+$$
$$+b_3W_{1pm}^n+b_4W_{2pm}^n=p_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_2U_{1xpm}^n+b_5U_{2xpm}^n+b_{12}U_{1ypm}^n+b_{13}U_{2ypm}^n+$$
$$+b_6W_{1pm}^n+b_7W_{2pm}^n=s_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_{11}U_{1xpm}^n+b_{12}U_{2xpm}^n+b_{14}U_{1ypm}^n+b_{15}U_{2ypm}^n+$$
$$+b_{16}W_{1pm}^n+b_{17}W_{2pm}^n=h_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_{12}U_{1xpm}^n+b_{13}U_{2xpm}^n+b_{15}U_{1ypm}^n+b_{18}U_{2ypm}^n+$$
$$+b_{19}W_{1pm}^n+b_{20}W_{2pm}^n=r_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_3U_{1xpm}^n+b_6U_{2xpm}^n+b_{16}U_{1ypm}^n+b_{19}U_{2ypm}^n+$$
$$+b_8W_{1pm}^n+b_9W_{2pm}^n=q_{pm}+q_{\omega pm}^{n-1},$$

$$b_4U_{1xpm}^n+b_7U_{2xpm}^n+b_{17}U_{1ypm}^n+b_{20}U_{2ypm}^n+$$
$$+b_9W_{1pm}^n+b_{10}W_{2pm}^n=g_{\omega pm}^{n-1}.$$

Коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров p и m.

Заключение

Полученное в работе аналитическое решение позволяет исследовать деформирование физически нелинейных трехслойных прямоугольных пластин при действии терморадиационных нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трёхслойных физически нелинейных стержней / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Л.Н. Рабинский. – Москва: МАИ, 2016. – 183 с.

2. *Журавков*, *М.А.* Математические модели механики твердых тел / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск: БГУ, 2021. – 535 с.

3. *Старовойтов*, *Э.И.* Трехслойные стержни в терморадиационных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. – Минск: Беларуская навука, 2017. – 275 с.

4. *Старовойтов*, *Э.И.* Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2013. – № 1 (22). – С. 31–35.

5. *Starovoitov*, *E.I.* Elastic circular sandwich plate with compressible filler under axially symmetrical thermal force load / E.I. Starovoitov, Y.V. Zakharchuk, E.L. Kuznetsova // Journal of the Balkan Tribological Association. – 2021. – Vol. 27, № 2. – P. 175–188.

6. *Козел*, *А. Г.* Термоупругий изгиб круговой трехслойной пластины, связанной с основанием Пастернака / А.Г. Козел // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 2 (51). – С. 31–37.

7. *Зеленая*, *А.С.* Изгиб термоупругопластической трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / Белорус. гос. ун-т. транспорта. – Гомель, 2019. – Вып. 12. – С. 76–84.

8. *Нестерович*, *А.В.* Неосесимметричное термосиловое деформирование круговой трехслойной пластины / А.В. Нестерович // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 2 (27). – С. 54–60.

9. *Starovoitov*, *E.I.* Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol. 47. – № 5. – P. 580–589.

10. *Плескачевский*, *Ю.М.* Изгиб трехслойной круговой пластины кольцевой нагрузкой в нейтронном потоке / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Актуальные вопросы машиноведения. – 2023. – Т. 12. – С. 47–51.

11. *Численный расчет и анализ напряженного состояния в слоистом теле при трении с учетом изменения модулей упругости покрытия и основания* / В.В. Можаровский, В.А. Кукареко, С.А. Марьин, А.В. Кушнеров // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 1 (58). – С. 22–28.

12. *Старовойтов*, *Э.И.* Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т. 21, № 2. – С. 162–169.

13. *Маркова*, *М.В.* Напряжённо-деформированное состояние круговой трёхслойной ступенчатой пластины при вынужденных колебаниях / М.В. Маркова // Механика. Исследования и инновации. – 2022. – № 15. – С. 134–146.

14. *Grover*, *N.* An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. – 2016. – Vol. 52. – P. 41–51.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского фонда фундаментальных исследований (*проект* № Т24РМ-004).

Поступила в редакцию 06.09.2024.

Информация об авторах
Мельникова Анастасия Сергеевна – к.ф.-м.н.