

УДК 539.3

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_37](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_37)

EDN: SKXJLW

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ КОНТАКТА И ИЗНОСА ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС С ПОКРЫТИЕМ ИЗ КОМПОЗИТА ПРИ КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Киргинцева

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## ASYMPTOTIC DEPENDENCES OF CALCULATION OF CONTACT PARAMETERS AND WEAR OF TEETH OF GEARS WITH COMPOSITE COATING DURING CONTACT INTERACTION

V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Разработана методика построения теоретических и численных зависимостей и алгоритмов для определения параметров контакта и износа, в том числе для зубчатых колес с покрытиями. Предложены асимптотические зависимости расчета параметров контактного взаимодействия и износа упругих тел с покрытиями из композита. Создана компьютерная программа, позволяющая строить профиль зубьев зубчатых колес, определять зону контакта взаимодействующих зубьев зубчатых колес, вычислять толщину изношенного слоя, учитывать расположение волокон в матрице композиционного материала на параметры износа. Предлагаемые подходы могут быть использованы в производственных процессах для выбора материалов при создании конструктивных элементов деталей машин.

**Ключевые слова:** *параметры контакта, покрытия из композита, зубчатые колеса, асимптотические зависимости.*

**Для цитирования:** *Можаровский, В.В.* Асимптотические зависимости расчета параметров контакта и износа зубьев зубчатых колес с покрытием из композита при контактном взаимодействии / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, С.В. Киргинцева // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 37–42. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_37](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_37). – EDN: SKXJLW

**Abstract.** A methodology was developed for constructing theoretical and numerical dependencies and algorithms for determining contact and wear parameters, including for gears with coatings. The asymptotic dependences of calculating the parameters of contact interaction and wear of elastic bodies with composite coatings are proposed. A computer program has been created that makes it possible to build a profile of the teeth of gears, determine the contact zone of the interacting teeth of gears, calculate the thickness of the worn layer, and take into account the location of fibers in the matrix of the composite material for wear parameters. The proposed approaches can be used in production processes to select materials when creating structural elements of machine parts.

**Keywords:** *contact parameters, composite coatings, gears, asymptotic dependencies.*

**For citation:** *Mozharovsky, V.V.* Asymptotic dependences of calculation of contact parameters and wear of teeth of gears with composite coating during contact interaction / V.V. Mozharovsky, D.S. Kuzmenkov, S.V. Kirhintsava // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 37–42. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2025\\_1\\_62\\_37](https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_37) (in Russian). – EDN: SKXJLW

### Введение

Зубчатые колеса считаются очень важной частью взаимодействующих элементов деталей машин в машиностроении и на транспорте. Для зубчатых колес используются многочисленные покрытия, которые обеспечивают их защиту от износа. В настоящем исследовании ограничимся рассмотрением покрытий из композитов, в которых материал покрытия обладает анизотропными свойствами, а основание – изотропными.

В данной работе развиты математические и численные модели и теории о контактном взаимодействии изотропных и анизотропных цилиндрических тел (в том числе с покрытиями), которые применимы для построения методики по

расчету износа, напряженного состояния и деформативности зубьев зубчатых колес из композитов.

### 1 Постановка задачи

Принципиальная схема взаимодействия элементов зубчатых передач показана на рисунке 1.1.

Износ и напряжения в зубьях и в покрытиях из композита при взаимодействии зубьев определяется по разработанной методике [1]–[3].

Теоретической основой реализации поставленной задачи являются решения о контактном взаимодействии цилиндров с покрытием из ортотропного материала, которые моделируют контакт зубьев зубчатых колес. В работах [1], [2] дана

методика расчета параметров контакта и напряжений при взаимодействии жесткого цилиндра с ортотропным покрытием. Для определения линейного износа зубьев с покрытием необходимо знать размеры зоны контакта, которые легко можно определить исходя из графиков на рисунке 1.2. Отношение модулей упругости ортотропного покрытия к основанию  $E_2 / E$  соответственно будут: 1 – 24; 2 – 12; 3 – 2,5; 4 – 1; 5 – 0,05 (рисунок 1.2).

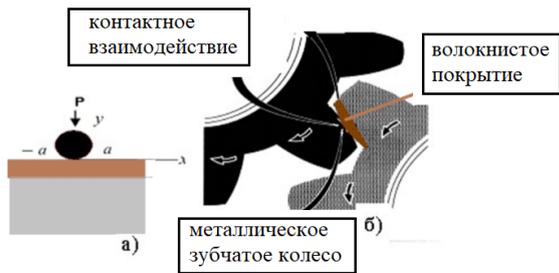


Рисунок 1.1 – Схема, моделирующая контакт зубьев с покрытием: а) математическая модель расчета контактного взаимодействия; б) схема контакта зубьев

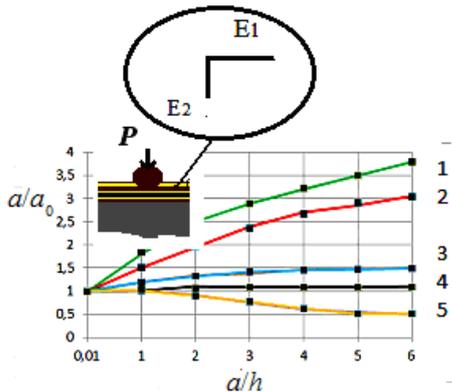


Рисунок 1.2 – Зависимость относительной полуширины площадки контакта  $a / a_0$  от  $a / h$

На рисунке 1.2 приведены зависимости изменения зоны контакта  $\tilde{a} = a / a_0$  от  $\alpha_0 = a / h$ ,

где  $a_0 = \sqrt{\frac{2PR}{\pi t}}$  – полуширина площадки контак-

та при контакте с ортотропным цилиндром, основные обозначения используемых параметров представлены в [1], [2]. Полученные результаты являются оценочными, они показывают качественное влияние упругих свойств материалов и их упругих соотношений на параметры контакта и могут использоваться в инженерных расчетах. Здесь  $E_y = E_2; \nu_{xy} = \nu_{12}; E_j, G_{12}, \nu_{ij}$  – технические постоянные материала (модули упругости и коэффициенты Пуассона).

Следует отметить, что расчет параметров контакта (размеров зон контакта, напряжений,

износа и т. д.) применительно к работе таких передач, как зубчатые колеса из композитов, является многопрофильным, включает расчеты, связанные с напряжениями зубьев и трибологическими отказами, такими как износ. Для автоматизации процесса расчета на износ зубьев написана компьютерная программа, по которой можно прогнозировать и определять ресурс работы такой передачи, делать визуализацию результатов расчета в виде графических зависимостей, таблиц и т. д.

Для расчета параметров контакта при взаимодействии зубьев зубчатых колес, в которых одно колесо имеет покрытие из композита, жестко скрепленного с упругим основанием, а другое – металлическое (изотропное), необходимо рассмотреть следующие математические модели контактного взаимодействия:

а) теоретическое описание контакта жесткого цилиндра с изотропным цилиндром, имеющим покрытие из композита;

б) теоретическое описание контакта упругого (изотропного) цилиндра с изотропным цилиндром, имеющим покрытие из композита.

Для дальнейшего исследования рассмотрим более подробно расчет параметров контакта, принимая модель а) (рисунок 1.1).

Например, рассмотрен расчет износа зубьев зубчатого колеса с покрытиями из волокнистого материала на упругом основании по созданной программе. Формула для определения линейного износа зубьев зубчатого колеса из композита при заданной интенсивности износа  $I$  будет [3, 4]

$$h_u = 2a\nu_{ck}nztI / \nu,$$

здесь размер зоны контакта  $a$  определяется по графикам на рисунке 1.2;  $z$  – количество пар зацепления ( $z = 1$ );  $t$  – время работы, мин;  $N = nzt$  – количество циклов зацепления;  $\nu$  – скорость качения (обозначения параметров, входящих в формулу даны в [3], [4]).

Далее исследовалась сходимость численных решений в зависимости от толщины покрытий и отношений свойств материала.

## 2 Методика расчета параметров контакта

Вначале представим асимптотические зависимости для определения зон контакта для покрытия на жестком основании. Рассматриваем следующие возможные случаи:

1. Толщина покрытия больше полуширины зоны контакта ( $h > a$ ), тогда следуя работе [1], исходя из полученных решений для симметричной нормальной нагрузки  $p(x)$  перемещение (осадка поверхности) будет

$$v = \frac{S_{22}}{\pi} (\beta_2 + \beta_1) \times \left[ \int_{-a}^a p(t) \ln \left| \frac{t-x}{h} \right| dt + \sum_{i=0}^{\infty} d_i \int_{-a}^a p(t) \left( \frac{t-x}{h} \right)^{2i} dt \right],$$

$$|x| < a.$$

Тогда теоретический расчет значения полуширины контакта производился по асимптотической зависимости:

$$\left[\frac{a}{h}\right]^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4d_1 a_0^2 / h^2}}{2d_1},$$

которую после некоторых преобразований можно записать в удобную формулу для вычислений в виде:

$$a^2 / a_0^2 = \frac{1}{1 - d_1 (a^2 / h^2)},$$

где коэффициенты  $d_j$  (ограничимся  $j = 1$ ) определяются вычислением интегралов:

$$d_j = \frac{(-1)^j}{(2j)!} \int_0^\infty [1 + L(\beta)] \beta^{2j-1} d\beta;$$

$$L(\beta) = \frac{T(\beta)}{\Lambda(\beta)}; \quad \left| \frac{t-x}{h} \right| < 2,$$

где

$$T(\beta) = \left( R_2 Q_1 sh \frac{\beta}{\beta_1} ch \frac{\beta}{\beta_2} - R_1 Q_2 sh \frac{\beta}{\beta_2} ch \frac{\beta}{\beta_1} \right) (\beta_2 - \beta_1);$$

$$\Lambda(\beta) = \beta_1 R_1 Q_1 + \beta_2 R_2 Q_2 +$$

$$+ (\beta_1 R_1 Q_2 + \beta_2 R_2 Q_1) sh \frac{\beta}{\beta_1} sh \frac{\beta}{\beta_2} -$$

$$- (\beta_1 Q_1 R_2 + \beta_2 Q_2 R_1) ch \frac{\beta}{\beta_1} ch \frac{\beta}{\beta_2}.$$

Входящие здесь коэффициенты определяются из работы [1], [2]:

$$Q_i = S_{12} \gamma_i - \frac{S_{22}}{\gamma_i}; \quad R_i = S_{11} \gamma_i^2 - S_{12}; \quad i = 1, 2;$$

коэффициенты  $S_{ij}$  в случае плоской деформации:

$$S_{ii} = \frac{1 - \nu_{3i} \nu_{i3}}{E_i}; \quad i = 1, 2; \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}};$$

$$S_{12} = \frac{-(\nu_{12} + \nu_{13} \nu_{31})}{E_1}.$$

Здесь  $E_j$ ,  $G_{12}, \nu$  – технические постоянные материала, параметр  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  – это действительные корни характеристического уравнения

$$S_{11} \gamma^4 + (2S_{12} + S_{66}) \gamma^2 + S_{22} = 0,$$

которые определяются по формулам

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11} S_{22}}}{2S_{11}}}, \quad i = 1, 2.$$

Обозначив  $\beta_i = \frac{1}{\gamma_i}$ ,  $i = 1, 2$ , на основании

свойств корней характеристического уравнения имеем:

$$\beta_1 \beta_2 = \frac{S_{11}}{S_{22}}; \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{2S_{12} + S_{66}}{S_{22}}.$$

Для изотропного покрытия имеем:  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

2. Методику расчета строим в случае тонкого покрытия ( $h < a$ ), полуширина контакта

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{2} PhRS}; \quad \text{давление} \quad p(x) = \frac{a^2 - x^2}{2RhS} \quad \text{или}$$

$$p(x) = \frac{3P}{4a^3} (a^2 - x^2), \quad \text{где } R - \text{радиус индентора, } h -$$

толщина покрытия;  $S = S_{22} - S_{12}^2 / S_{11}$ .

После некоторых преобразований можно также записать формулу, удобную для расчетов:

$$a^2 / a_0^2 = (3\pi / 2) (a/h)^{-k_s},$$

$$\text{где } k_s = \frac{1 - S_{12}^2 / (S_{11} S_{22})}{2(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Применяя эти асимптотические зависимости, построены графики изменения размера зоны контакта от толщины покрытия на жестком основании (рисунок 2.1).

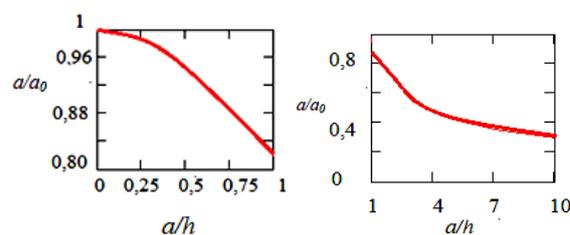


Рисунок 2.1 – Зависимость относительной полуширины площадки контакта  $a / a_0$  от  $a / h$  для жесткого основания

### 3 Методика расчета параметров контакта жесткого цилиндра с волокнистым покрытием на упругом основании

Рассматривая расчет размеров зон контакта жесткого цилиндра с волокнистым покрытием на упругом основании можно построить инженерную методику расчета износа, используя графические зависимости рисунка 1.2, полученные на основе работы [1]. Для удобства в инженерных расчетах графического описания изменения зоны контакта цилиндров была сделана аппроксимация кривых с помощью аналитических зависимостей (уравнения кубической регрессии)

$$\tilde{a} = b_3 \alpha^3 + b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0,$$

где  $\tilde{a} = a / a_0$ ,  $\alpha = a / h$ ; коэффициенты  $b_i$  определяются из таблицы 3.1.

Построенные графики (рисунок 2.1) и зависимости для определения зон контакта весьма неудобны, так как отношение размеров зон контакта  $\tilde{a} = a / a_0$  является функцией отношения  $a / h$ , которое неизвестно. Поэтому используя уравнения кубической регрессии, выразим  $\tilde{a} = a / a_0$  через  $a_0 / h$ . Для этого кубическое уравнение регрессии решаем методом Кардано с уточнением по численному методу Ньютона. Для этой процедуры был разработан алгоритм и компьютерная программа.

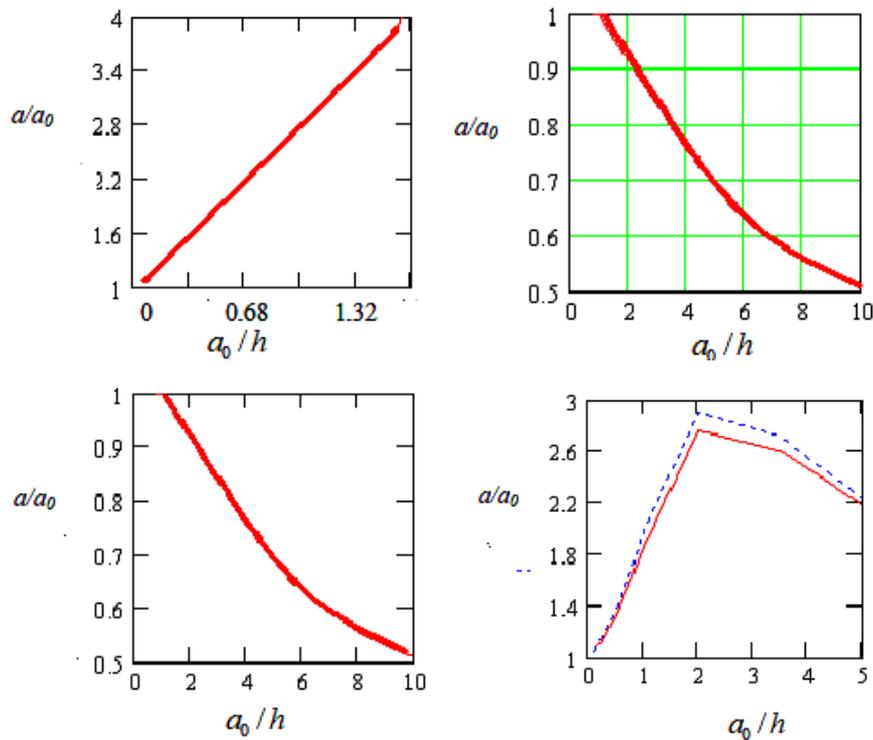


Рисунок 3.1 – Графики, показывающие изменения параметров контакта  $a/a_0$  для  $a_0/h$  (штриховая линия – расчет по приближенным формулам)

Таблица 3.1 – Коэффициенты  $b_i$

№ графика на рисунке 1.2	$b_3$	$b_2$	$b_1$	$b_0$
1	0,0114	-0,1592	1,015	0,9762
2	0,0002	-0,0424	0,5847	0,985
3	0,0031	-0,0461	0,2486	0,9979
4	0,0006	-0,0079	0,034	0,9958
5	0,0072	-0,0651	0,0478	1,0005

При разработке алгоритма расчета износа материала зубьев зубчатого колеса с покрытием необходимо выполнять следующие пункты:

а) рассчитываются координаты характерных точек зуба [2]. Строится профиль зуба. Формула для определения линейного износа зубьев зубчатого колеса из композита при заданной интенсивности износа  $I$ :  $h_u = 2a v_{ck} n z t I / v$ , здесь полуширина контакта  $a$  определяется по вышеуказанной методике.

б) Для каждого типа материала определяется величина износа  $h_u$ . Задается  $I_h$  – безразмерная характеристика износа (вычисляется из эксперимента).

Для отработки методики расчета рассмотрим простейший пример.

Пусть зубчатая передача без смазки выполнена из шестерни с покрытием из композита  $h = 2$  мм, состоящего из полиамидной матрицы и стеклянных волокон с модулями упругости

$E_m = 3500$  кг/мм<sup>2</sup>,  $E_f = 85000$  кг/мм<sup>2</sup>, коэффициентами Пуассона  $\nu_m = 0,35$ ,  $\nu_f = 0,2$ , модулями сдвига  $G_m = 1300$  кг/мм<sup>2</sup>,  $G_f = 35420$  кг/мм<sup>2</sup>, с различным процентным содержанием волокон, зацепляется с таким же колесом. Например, по вышеприведенным зависимостям сделан расчет механических постоянных коэффициентов материала (ортотропного) для шестерни и колеса из композита с процентным содержанием волокон  $V = 40\%$ :  $E_1 = 36100$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\eta = 0,92$ ;  $E_2 = 7582$  кг/мм<sup>2</sup>;  $G_{12} = 2838$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\nu_{12} = \nu_{13} = 0,29$ ;  $\nu_{21} = \nu_{31} = 0,06$ ;  $K_f = 47222$  кг/мм<sup>2</sup>;  $K_m = 3889$  кг/мм<sup>2</sup>;  $K = 6144$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\nu_{23} = \nu_{32} = 0,53$ . Зубчатая передача имеет следующие геометрические размеры в общепринятых обозначениях [2]–[4] и режим работы:  $m = 4$ ,  $z_s = 23$ ,  $z_k = 23$ ,  $A = 92$  мм,  $\alpha = 20^\circ$ ,  $b = 20$  мм,  $d_s = 92$  мм,  $d_k = 92$  мм,  $M_{кр} = 852,6$  н.мм;  $n_s = 2000$  об/мин, передаточное число –  $u = 1$ . По результатам испытаний износ зубьев шестерни и колеса определялся числом циклов нагружения  $N_s = 4,15 \cdot 10^7$ . Необходимо определить изнашивание зубьев  $h_u$  при заданной интенсивности изнашивания  $I_s = 4,1 \cdot 10^{-8}$ .

Математическая модель контакта будет следующей. При продольном расположении (рисунок 3.2) волокна ориентированы параллельно оси  $X$ .

Для приближенных инженерных расчетов упругих постоянных волокнистых материалов

можно воспользоваться соотношениями для модулей упругости

$$E_1 = E_x = V_f E_f + (1 - V_f) E_m;$$

$$E_2 = E_y = \frac{E_m (1 + \eta V_f)}{1 - \eta V_f},$$

где  $\eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m}$ ,  $V_f$  – объемное содержание во-

локна в матрице, а коэффициенты Пуассона определяются по формуле

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m,$$

из свойств симметрии следует:

$$E_3 = E_2; \nu_{13} = \nu_{12}; \nu_{31} = \nu_{21}; \nu_{32} = \nu_{23}; \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}.$$

Индексы  $f$  и  $m$  обозначают волокно и матрицу соответственно.

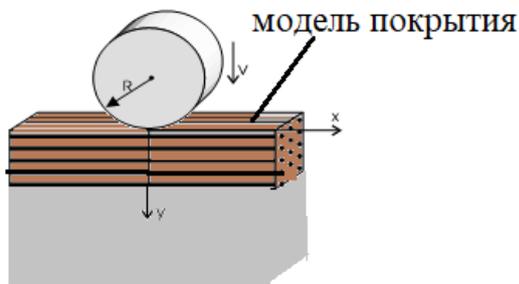


Рисунок 3.2 – Контакт жесткого цилиндра с ортотропным покрытием при продольном расположении волокна в матрице

Возьмем интенсивность изнашивания зуба шестерни  $I_s = 4,1 \cdot 10^{-8}$ . Используя приведенные ранее формулы для расчета исходных данных [2]–[4] и определения зон контакта, износа зубьев из композита зависимости  $h_u = 2a \nu_{ck} n z t l / \nu$ , строим график влияния объемного содержания волокон на толщину изношенного слоя для  $h > a$  (рисунок 3.3).

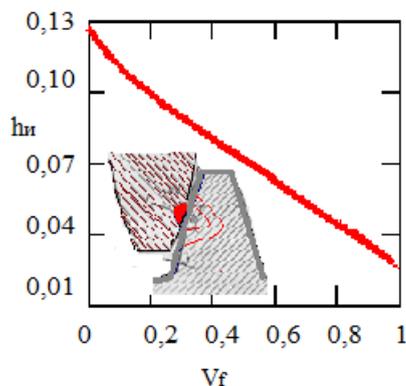


Рисунок 3.3 – График зависимости величины  $h_u$  (мм) износа покрытия от объемного содержания волокон  $V_f$

#### 4 Методика и алгоритм решения задачи определения напряжений

Расчет напряжений в упругом теле зубьев зубчатых колес из композита показал совпадение с известными данными расчета для зубьев из изотропных материалов, в частном случае, при выбранных определенных параметрах. Предложенный алгоритм и результаты расчета могут найти применение в вычислениях деформативности и напряженного состояния зубьев зубчатых колес из композитов для зубчатых передач.

Рассматривается реализация задачи расчета напряжений в покрытии из композита зуба зубчатого колеса при контакте с металлическим зубом, используя работу [1]. Сначала рассматриваем случай для ортотропного покрытия на жестком основании:

а) исходя из введенных пользователем начальных данных (модули Юнга, коэффициенты Пуассона, величину действующего давления и др.) программа по формулам из п.1 находит все необходимые величины для определения напряжений и перемещений;

б) далее по формулам (см. (3.19)–(3.22) из [1]) находим необходимые значения напряжений и перемещений

Разработана программа расчета напряжений для изотропных покрытий с волокнистым основанием, используя формулы из [1].

Создана систематизация по расчету напряжений и деформативности зубьев зубчатых колес применительно к композитам, учитывая: параллельное, нормальное расположение волокон и радиальное; рассматривается волокнистый материал изготовления зуба и определение его напряженного состояния при контактном взаимодействии. В этом случае можно рассматривать также расположение волокон и для функционально-градиентного материала зуба зубчатого колеса, считая, что зуб имеет покрытие из композита и основание может быть изотропным, жестким, ортотропным, трансверсально-изотропным. Для определения контактных перемещений зубьев из однородного изотропного полимерного колеса, находящегося в зацеплении, исходят из преобразованных формул Герца – Беляева, которые приведены, например, в [1]. Если материал зуба является волокнистым композитом, то для определения упругих постоянных, таких как модули упругости, коэффициенты Пуассона, можно применять приближенные формулы, определяющие эти постоянные через модули упругости матрицы и волокна по правилу «смесей».

#### Заключение

Износ контактирующих зубьев зубчатых колес зависит от множества факторов. Влияние всех факторов в предлагаемой модели одновременно учесть затруднительно. Поэтому в работе

приводятся примеры для расчета параметров контакта и износа зубьев с целью описания асимптотической методики и иллюстрации работы компьютерной программы. Для инженерного расчета необходимо проводить экспериментальные исследования для определения интенсивности изнашивания различных контактирующих волокнистых материалов. Таким образом, в результате выполнения данной работы была написана программа, позволяющая строить профиль зубьев зубчатых колес, определять зону контакта взаимодействующих зубьев зубчатых колес, вычислять толщину изношенного слоя, учитывать расположение волокон в матрице композиционного материала на параметры износа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Можаровский, В.В.* Прикладная механика слоистых тел из композитов / В.В. Можаровский, В.Е. Старжинский. – Минск: Наука и техника, 1988. – 280 с.
2. *Реализация методики расчета износа зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала* / В.В. Можаровский,

Д.С. Кузьменков, Ю.В. Василевич, С.В. Киргинцева // Теоретическая и прикладная механика. – 2024. – Вып. 39. – С. 109–115.

3. *Крагельский, И.В.* Основы расчетов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – Москва: Машиностроение, 1977. – 526 с.

4. *Влияние расположения волокон на параметры контакта и износа для зубьев зубчатых передач из композитов* / В.В. Можаровский, Д.С. Кузьменков, Ю.В. Василевич, С.В. Киргинцева // Математические методы в технологиях и технике. – 2023. – № 10. – С. 71–75.

Поступила в редакцию 30.01.2025.

#### Информация об авторах

*Можаровский Валентин Васильевич* – д.т.н., профессор  
*Кузьменков Дмитрий Сергеевич* – к.ф.-м.н., доцент  
*Киргинцева Светлана Викторовна* – старший преподаватель