Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

Б. И. КОРЕНБЛЮМ

О ФУНКЦИЯХ, ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ И ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ЕГО ГРАНИЦЫ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 12 II 1971)

1°. В настоящей заметке рассматриваются различные классы функций, голоморфных в круге $U\{z\in\mathbf{C},\ |z|<1\}$ и непрерывных в замкнутом круге $\overline{U}$, и для некоторых из этих классов решаются следующие проблемы:

I) Дать описание нулевых множеств $\{z\colon z\in\overline{U}, f(z)=0\}$, где $f(z)\not\equiv 0$ принадлежит тому или иному классу.

II) Описать функции $G(z)$, являющиеся внутренними частями * функций данного класса.

III) Охарактеризовать внешние части * $F(z)$ функций рассматриваемого класса.

2°. Мы будем рассматривать следующие классы аналитических функций:

1) A состоит из функций, голоморфных в U и непрерывных в $\overline{U}$;

2) AL_α $(0<\alpha\leqslant 1)$ состоит из функций $f\in A$, удовлетворяющих условию Липшица с показателем α;

3) A_n $(n=0, 1, \ldots)$ состоит из функций $f(z)$ таких, что $f^{(n)}\in A$, $A_0=A$;

4) H_n^2 $(n=0, 1, \ldots)$ состоит из функций $f(z)$ таких, что $f^{(n)}\in H^2$; $H_0^2=H^2$;

5) $A_\infty=\bigcap\limits_{n>0} A_n=\bigcap\limits_{n>0} H_n^2$;

Очевидно, $H^2\supset A\supset H_1^2\supset A_1\supset\ldots$ Кроме того, $H_1^2\subset AL_{1/2}$.

Теорема 1 (ср. (3)). *Если функция $f(z)$ принадлежит одному из классов H_n^2 $(n=0, 1, \ldots)$, A_∞, то ее внешняя часть $F(z)$ также принадлежит соответствующему классу; при этом*

$$\|F^{(n)}\|_{H^2}\leqslant\|f^{(n)}\|_{H^2}.$$

В (3) эта теорема доказана с некоторыми ограничениями, которые нам удалось впоследствии снять.

Нам неизвестно, справедлива ли аналогичная теорема для классов A_n $(n\geqslant 1)$ и AL_α $(0<\alpha\leqslant 1)$. Таким образом, для этих классов проблема III остается нерешенной.

3°. Теорема 2. *Пусть $f(z)\in AL_\alpha$, $f(z)\not\equiv 0$, $E=\{z\colon |z|\leqslant 1, f(z)=0\}$.*

Тогда

а) $E\cap U=\{z_1, z_2, \ldots\}$ *не более чем счетно*;

б) *если n_k — кратность нуля z_k, то*

$$\sum_k n_k(1-|z_k|)<\infty; \tag{1}$$

в)

$$\int_\gamma \log\rho(\zeta)\,|d\zeta|>-\infty, \tag{2}$$

где $\rho(\zeta)=\min\limits_{z\in E}|\zeta-z|$, $\gamma=\partial U$.

Обратно, если множество $E=\overline{E}\subset\overline{U}$ и натуральные числа n_k удовлетворяют условиям а), (1), (2), *то существует функция $f(z)\not\equiv 0$, принадле-*

* См. (1), а также (2), стр. 92.

жащая A_∞, и такая, что $E = \{z\colon |z| \leqslant 1,\ f(z) = 0\}$; при этом кратность каждого нуля $z_k \in U$ равна n_k, а в точках множества $E \cap \gamma$ $f(z)$ имеет нули бесконечной кратности.

Замечания. 1. Легко показать, что (2) эквивалентно условию

$$\int_0^1 \frac{\varphi_E(t)}{t}\,dt < \infty, \qquad (2')$$

где

$$\varphi_E(t) = \operatorname{mes}\{\theta\colon 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad \rho(e^{i\theta}) \leqslant t\}.$$

Для случая $E \subset \gamma$ необходимость этого условия установлена А. Берлингом, а его достаточность для классов A_n — Л. Карлесоном ([4]) и для A_∞ — В. С. Королевичем ([5]).

2. Условие (2), вообще говоря, сильнее, чем условие

$$\int_\gamma \log \rho_1(\zeta)\,|d\zeta| > -\infty, \qquad (3)$$

где $\rho_1(\zeta) = \min\limits_{z \in E \cap \gamma} |\zeta - z|$.

Переходим к доказательству теоремы 2. Необходимость условий а), б) очевидна. Необходимость в) следует из неравенства Иенсена. В самом деле, если $f \in AL_\alpha$, то $|f(\zeta)| \leqslant M_f [\rho(\zeta)]^\alpha$, поэтому

$$-\infty < \int_\gamma \log|f(\zeta)|\,|d\zeta| \leqslant 2\pi \log M_f + \alpha \int_\gamma \log\rho(\zeta)\,|d\zeta|.$$

Предположим теперь, что для множества $E = \overline{E} \subset \overline{U}$ и чисел n_k выполняются условия а), б), в) и построим функцию $f(z)$, удовлетворяющую всем условиям теоремы. Исключая тривиальный случай, будем предполагать, что $E \cap \gamma \neq \phi$, кроме того, для простоты будем считать, что $0 \,\overline{\in}\, E$. Рассмотрим произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_k \left(\frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \right)^{n_k}, \qquad (4)$$

которое в силу (1) сходится.

Лемма 1. *На множестве $\gamma \setminus E$ справедливы оценки*

$$|B^{(n)}(z)| \leqslant C_n [\rho(z)]^{-2n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (5)$$

где C_n — константы.

Доказательство. Беря логарифмическую производную, находим

$$B'(z) = B(z) \sum_k n_k \left(\frac{1}{z - z_k} - \frac{1}{z - 1/\bar{z}_k} \right) = B(z) \sum_k \frac{n_k\ (z_k - 1/\bar{z}_k)}{(z - z_k)(z - 1/\bar{z}_k)}.$$

Так как $|z - 1/\bar{z}_k| = |z - z_k| / |z_k|$ $(z \in \gamma)$, то, принимая во внимание (1), получим

$$|B'(z)| \leqslant \sum_k \frac{n_k (1 - |z_k|^2)}{|z - z_k|^2} \leqslant \frac{C_1}{[\rho(z)]^2} \quad (z \in \gamma \setminus E).$$

Продолжая подобным образом, получим (5).

Лемма 2. *Множество $\gamma \setminus E$ можно представить в виде суммы счетного множества неперекрывающихся замкнутых дуг J_n, обладающих свойствами:*

1) $M_n \leqslant 3m_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* $M_n = \max\limits_{z \in J_n} \rho(z)$, $m_n = \min\limits_{z \in J_n} \rho(z)$;

2) $\frac{1}{2} m_n \leqslant \tau_n \leqslant \pi/3$ $(\tau_n$ — *длина дуги* $J_n)$;

3) *каждое замкнутое множество $K \subset \gamma \setminus E$ покрывается конечным числом дуг J_n.*

Доказательство. Занумеруем открытые дуги γ_n окружности γ, дополнительные к замкнутому множеству $E \cap \gamma$. Очевидно, γ_n — связные компоненты множества $\gamma \setminus E$. Возьмем произвольную точку $e^{i\theta_0}$, принадлежащую γ_1, и, двигаясь от нее в положительном направлении, найдем точку $e^{i\theta_1}$ такую, что $|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_0}| = {}^1/_2\rho(e^{i\theta_0})$; точно так же найдем точку $e^{i\theta_2}$ для которой $|e^{i\theta_2} - e^{i\theta_1}| = {}^1/_2\rho(e^{i\theta_1})$, и т. д. Двигаясь от $e^{i\theta_0}$ в отрицательном направлении, найдем таким же образом точки $e^{i\theta_{-1}}, e^{i\theta_{-2}}, \ldots$, для которых $|e^{i\theta_{-n}} - e^{i\theta_{-n-1}}| = {}^1/_2\rho(e^{i\theta_{-n}})$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Рассматривая дуги $J_n^{(1)} = \{e^{i\theta}: \theta_n \leqslant \theta \leqslant \theta_{n+1}\}$ $(n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, легко убеждаемся в том, что для них выполняются условия 1) и 2), причем $\bigcup\limits_n J_n^{(1)} = \gamma_1$. Точно так же найдем систему дуг $J_n^{(2)}$ $(n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, покрывающую γ_2, и т. д. Очевидно, $\bigcup\limits_{n,k} J_n^{(k)} = \gamma \setminus E$. Так как каждое замкнутое множество $K \subset \gamma \setminus E$ покрывается конечным числом открытых дуг γ_n, а множество $K \cap \gamma_n$ покрывается конечным числом замкнутых дуг $J_k^{(n)}$, то лемма 2 доказана.

Переходим теперь к построению функции $f(z)$. Пусть согласно лемме 2 $\gamma \setminus E = \bigcup\limits_n J_n$, а $e^{i\theta_n}$ — середина дуги J_n. Построим точки $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ $(r_n > 1)$ так, чтобы из a_n дуга J_n была видна под углом $\pi / 2$. Так как $\tau_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то, как легко видеть, $r_n - 1 \sim \tau_n / 2$.

Имеем

$$\sum_n \tau_n \log m_n \leqslant \int_\gamma \log \rho(\zeta) |d\zeta| \leqslant \sum_n \tau_n \log M_n \leqslant \sum_n \tau_n \log m_n + 2\pi \log 3.$$

Поэтому из (2) следует $\sum\limits_n \tau_n \log m_n > -\infty$.

Выберем числа $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \to \infty$ так, чтобы $\sum\limits_n \lambda_n \tau_n \log m_n > -\infty$ (это всегда можно сделать). Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp\left\{-\sum_n \frac{e^{i\theta_n}\lambda_n\tau_n |\log m_n|}{a_n - z}\right\}. \tag{6}$$

Эта функция — внешняя в U; она регулярна всюду вне множества $\overline{\{a_n\}} = \{a\} \cup (E \cap \gamma)$, а в круге U $|\Phi(z)| < 1$. Далее,

$$|\Phi(z)| \leqslant e^{-\lambda_n |\log m_n|} \quad (z \in J_n) \tag{7}$$

(эта оценка — простое следствие того, что из точки a_n дуга J_n видна под углом $\pi / 2$). Из (7) и леммы 2 следует, что при приближении точки $z \in \gamma \setminus E$ к множеству $\gamma \cap E$ $\Phi(z) = o[\rho^N(z)]$, где N — сколь угодно большое число. С другой стороны, дифференцируя (6), легко находим $\Phi^{(n)}(z) = \Phi(z)\varphi_n(z)$, где $|\varphi_n(z)| \leqslant C_n'[\rho(z)]^{-2n}$ $(n = 1, 2, \ldots, C_n'$ — константы).

Наконец, построим функцию

$$f(z) = \Phi(z)B(z).$$

Принимая во внимание лемму 1 и только что доказанные свойства функции $\Phi(z)$, мы легко убедимся в том, что $f(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.

4°. Переходим теперь к проблеме II.

Теорема 3. *Пусть дана внутренняя функция*

$$G(z) = z^m \prod_k \left(\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z}\right)^{n_k} \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\sigma(\theta)\right\}, \tag{8}$$

где $m \geqslant 0$, $n_k \geqslant 1$, $0 < |z_k| < 1$ $\sum\limits_n n_k(1 - |z_k|) < \infty$, *а неотрицательная сингулярная мера* $d\sigma$ *сосредоточена на замкнутом множестве* $E_1 \subset \gamma$.

Для того чтобы $G(z)$ была внутренней частью некоторой функции из класса AL_α, необходимо, чтобы множество $E=\overline{\{z_k\}}\cup E_1$ удовлетворяло условию (2).

Обратно, если условие (2) *для E выполнено, то существует функция $f\in A_\infty$, внутренняя часть которой совпадает с $G(z)$.*

Теорема 4. *Пусть $E\subset\bar{U}$ — замкнутое множество, удовлетворяющее условию* (2).

Тогда существует внешняя функция $\Phi(z)\not\equiv 0$, обладающая следующим свойством: произведение $\Phi(z)G(z)$ принадлежит классу A_∞, какова бы ни была внутренняя функция $G(z)$ вида (8), *если только $\{z_k\}\cup E_1\subset E$.*

Для доказательства каждой из этих теорем мы строим по множеству E внешнюю функцию $\Phi(z)$ вида (6), а затем функцию

$$f(z)=\Phi(z)G(z). \tag{9}$$

Легко доказывается (как в лемме 1), что на множестве $\gamma\setminus E$ справедливы оценки

$$|G^{(n)}(z)|\leqslant C_n''[\rho(z)]^{-2n}\ (n=1,2,\ldots), \tag{10}$$

где C_n'' — константы. Пользуясь (10) и ранее доказанными свойствами функции $\Phi(z)$, убеждаемся в том, что $f(z)\in A_\infty$.

Заметим, что в теореме 4 множество $E\cap U$ может быть и несчетным.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступило 8 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Beurling, Acta Math., 81, № 3—4, 239 (1949). [2] К. Гофман, Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963. [3] Б. И. Коренблюм, В. С. Королевич, Матем. заметки, 7, № 2, 165 (1970). [4] L. Carleson, Acta Math., 87, № 3—4, 325 (1952). [5] В. С. Королевич, Укр. матем. журн., 22, № 6, 823 (1970).