Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 517.917 *МАТЕМАТИКА*

А. В. КОСТИН

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРОДОЛЖАЕМЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 4 III 1971)

Изучение поведения неограниченно продолжаемых вправо решений (n-решений) вещественного уравнения

$$d^2y / dx^2 = p(x)[1+q(x)]|y|^\sigma \operatorname{sign} y, \quad \sigma > 1, \quad x \in \Delta = (x_0, +\infty), \tag{1}$$

где $p(x) \in C_\Delta{}^k$ $(k \geqslant 0)$, $p(x) \neq 0$ в Δ, $q(x) \in C_\Delta$, $q(x) = o\ (1)$, является важной предпосылкой для построения асимптотической теории нелинейных уравнений более общих типов. Случай $p(x) \equiv \pm x^\alpha$ $(\alpha = \mathrm{const})$, $q(x) \equiv 0$ детально исследован Эмденом, Фаулером и др. ([1], гл. VII). Уравнение (1) общего вида при $k=2$, $\sigma > 1$ изучалось И. Т. Кигурадзе при $p(x) < 0$ [2] и при $p(x) > 0$ [3]. В [3] получила существенное развитие идея использования замен переменных

$$y = v(x)\xi, \quad t = t(x) \quad (\xi = \xi(t)) \tag{2}$$

общего (в отличие от [1]) типа и предложена классификация всех подслучаев в зависимости от величины пределов A_i $(i = 1, \ldots, 4)$ некоторых функций $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ при $t \to +\infty$. Метод [3] не позволяет, однако, исследовать случаи $A_i = +\infty$ и только частично применим к случаям $-\infty \leqslant A_i \leqslant 0$.

В настоящей работе для случая $p(x) > 0$ предложен принципиально новый способ выбора функций (2), дана новая классификация всех подслучаев и разработан метод исследования критических подслучаев. В результате удалось полностью изучить асимптотику n-решений уравнений (1) (уравнения класса S), удовлетворяющих одному из следующих условий S_i $(i = 1, 2, 3)$:

S_1. $k = 1$, $p(x) > 0$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \sqrt{p(x)}\,dx < +\infty$, и при $a = +\infty$ существует

$$\lim_{x \to +\infty} B_a(x) = \Lambda_a, \quad |\Lambda_a| \leqslant +\infty,$$

$$B_a(x) = p'(x)\,p^{-3/2}(x)\,u_a(x), \quad u_a(x) = \int_x^a \sqrt{p(x)}\,dx,$$

S_2. $k = 1$, $p(x) > 0$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \sqrt{p(x)}\,dx = +\infty$, предел Λ_{x_0} существует и конечен,

S_3. $k = 3$, $p(x) > 0$, $\displaystyle\int_{x_0}^{\infty} \sqrt{p(x)}\,dx = +\infty$, $|\Lambda_{x_0}| = +\infty$, и для функции $A(t)$ из п. 2 (см. (8)) существуют пределы *

---

* Условия (3) легко выразить с помощью функций $V_{x_0}(x)$ (п. 1), $B_{x^0}(x)$.

$$\lim_{t\to+\infty} A'(t)/A(t) = l_1, \quad \lim_{t\to+\infty} [1/A(t)]' = l_2, \quad \lim_{t\to+\infty} [[A(t)/A'(t)]^h]' = l_3,$$

$$|l_i| \leqslant +\infty \quad (i = 1, 2, 3), \quad h = \begin{cases} -1, & l_1 = 0, \\ 1, & l_1 \neq 0, \end{cases} \tag{3}$$

причем $l_1 \neq \sigma - 1$.

Нетрудно убедиться, что класс S существенно выходит за рамки класса $\mathcal{S}$ уравнений, изученного в ([3]).

Асимптотические представления (a-представления) $y_3 - y_6$ нашей работы отлично по форме от a-представлений работы ([3]), однако отметим, что в случае уравнений, принадлежащих пересечению $S \cap \mathcal{S}$, они дают ту же асимптотику, что и a-представления из ([3]).

1. Формулировка результатов. Для дальнейшего введем обозначения:

$$V_a(x) = \left(\frac{\sigma-1}{2}\,|u_a(x)|\right)^{-2/(\sigma-1)}; \quad \gamma = 1 + \frac{\sigma-1}{2}\left(\frac{\Lambda_a}{2}+1\right);$$

$$\beta = \operatorname{sign} u_a(x) \quad (x > x_0);$$

$$a = \begin{cases} +\infty & \text{в случае } S_1, \\ x_0 & \text{в случае } S_2, S_3. \end{cases}$$

Известно (([1]), гл. VII), что в случае уравнения (1) достаточно ограничиться изучением n-решений с условием $y(x) > 0$ для всех x, больших некоторого (n_+-решения): каждому n_+-решению отвечает n_--решение $y(x)$ и, наоборот, n-решений других типов нет.

С помощью метода п. 2 нами доказаны теоремы 1—3. Теорема 1 указывает все возможные a-представления, а теоремы 2—3 решают вопрос о действительном существовании n_+-решений с теми или иными a-представлениями.

Теорема 1. *Для любого n_+-решения уравнения* (1) *класса S выполняется одно из следующих a-представлений* *:

$$y_1 \sim 1, \quad y_2 \sim x, \quad y_3 \sim V_a(x) \quad (a = +\infty),$$

$$y_4 \sim x\left[\int_x^\infty \left[\frac{x}{V_a(x)}\right]^{\sigma-1} \frac{1}{x}\,dx\right]^{-1/(\sigma-1)} \quad (a = +\infty),$$

$y_5 \sim V_a(x) \quad (a = x_0)$, $y_6 \sim [-p'(x)\,p^{-3/2}(x)\,|u_a(x)|^{-1}]^{1/\sigma-1}\ (a = x_0)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие S_1.*

Тогда: 1) *случай $\gamma > 1$ невозможен*; 2) *если $0 < \gamma \leqslant 1$, то* (1) *допускает n_+-решения вида y_i $(i = 1, 2, 3)$*; 3) *если $-\infty \leqslant \gamma < 0$, то* (1) *допускает n_+-решения вида y_1*; 4) *если $\gamma = 0$ и хотя бы одно из условий*

$$\lim_{x\to+\infty} V_a'(x) = +\infty, \quad \int_x^\infty \left[\frac{x}{V_a(x)}\right]^{\sigma-1} \frac{1}{x}\,dx < +\infty \quad (a = +\infty) \tag{4}$$

нарушено, то (1) *допускает n_+-решения вида y_1, если же оба условия* (4) *выполнены, то* (1) *допускает n_+-решения вида y_i $(i = 1, 2, 4)$.*

Теорема 3. *В случае S_2 выполняется свойство $1 \leqslant \gamma < +\infty$, и* (1) *допускает n_+-решения вида y_5; в случае S_3 $\gamma = +\infty$, если при этом $l_1 < \sigma - 1$ $(> \sigma - 1)$, то* (1) *допускает n_+-решения вида y_6 (y_1).*

2. Метод исследования. Легко проверить, что если замена (2) такова, что $v(x)$, $t'(x) > 0$ $(x > x_0)$, $t(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то изучение n_+-решений уравнения (1) равносильно изучению n_+-решений

---

* $f(x) \sim \varphi(x)$ означает, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/\varphi(x) = c$, $0 < |c| < +\infty$.

уравнения

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}[t'(x)]^2+\frac{d\xi}{dt}\left[t''(x)+2\frac{v'(x)}{v(x)}t'(x)\right]+\frac{v''(x)}{v(x)}\xi-\tilde{p}(x)v^{\sigma-1}(x)\xi^{\sigma}=0, \quad (5)$$

где $x=x(t)$ — функция, обратная для $t=t(x)$, $\tilde{p}(x)=p(x)[1+q(x)]$.

Для нахождения функций (2) составляем вспомогательное уравнение

$$v''/v=(v'/v)'+(v'/v)^2=d_1+d_2=p(x)v^{\sigma-1},\quad v=v(x), \quad (6)$$

и, «пренебрегая» слагаемым d_1, берем в качестве $v(x)$ функцию $V_\alpha(x)$ (п. 1), удовлетворяющую уравнению $(v')^2=p(x)v^{\sigma+1}$. Одновременно полагаем $t=\beta\ln V_\alpha(x)$, после чего (5) запишется в следующем удобном для исследования виде:

$$d^2\xi/dt^2+\beta[1+A(t)]d\xi/dt+A(t)\xi-[1+r(t)]\xi^{\sigma}=0; \quad (7)$$

$$A(t)=A(t(x))=1+\frac{\sigma-1}{2}[{}^1/{}_2B_\alpha(x)+1]=-[V_\alpha(x)/V_\alpha'(x)]'; \quad (8)$$

$$\lim_{t\to+\infty}A(t)=\gamma,\quad r(t)=r(t(x))=q(x)=o(1).$$

Все дальнейшие выводы основаны на изучении (7).

Лемма 1. *Если в уравнении вида*

$$d^2\xi/dt^2+a(t)d\xi/dt+b(t)\xi-c(t)\xi^{\sigma}=0,\ \sigma>1,\ t\in\Delta_1=[t_0,+\infty), \quad (9)$$

1) $a(t)$, $b(t)$, $c(t)\in C_\Delta$, *и ограничены в* Δ_1, $c(t)\geqslant c_0>0$, $c_0=\text{const}$, *то уравнение* (9) *не может иметь неограниченных сверху п-решений,*

2) *этот вывод остается в силе, если* $a(t)$, $b(t)\to-\infty$ *при* $t\to+\infty$, *при сохранении прочих условий пункта* 1).

Ввиду важности этой леммы, приведем план ее доказательства. Пусть $\xi(t)$ — неограниченное сверху решение уравнения (9), тогда легко доказать, что:

1′) $\xi(t)$ — n_+-решение, $[\xi(t)]^{-1}=o(1)$, $\xi'(t)>0$ при больших t,

2′) $[\xi'(t)]^{-1}\xi(t)$, $\xi'(t)\xi^{-\sigma}(t)=o(1)$.

Свойство 1′) очевидно, а обоснование 2′) в случае 1) производится путем рассмотрения с помощью приемов работы ([1]) вспомогательных уравнений «первого порядка»

$$ds/dt=\xi^{\delta-1}(t)c(t)-b(t)-a(t)s-s^2,\quad s=\xi'(t)/\xi(t),$$

$$dw/dt=c(t)-b(t)\xi^{-\sigma+1}(t)-[a(t)+\delta\xi'(t)/\xi(t)]w,\quad w=\xi'(t)/\xi^{\sigma}(t),$$

равносильных уравнению (9) для решений со свойством 1). Нужное нам утверждение вытекает затем из 2′) и равенства

$$d^2\xi/dt^2=\xi^{\sigma}[c(t)-b(t)\xi^{-\sigma+1}-a(t)\xi'\xi^{-\sigma}]. \quad (10)$$

Случай 2) анализируется непосредственно, с учетом свойства 1′) и равенства (10).

Лемма 2. *Константа* γ *обладает свойством* $-\infty\leqslant\gamma\leqslant1$, $1\leqslant\gamma\leqslant+\infty$, $\gamma=+\infty$ *в случаях* S_1, S_2, S_3 *соответственно. В каждом из этих случаев любое* n_+*-решение* $\xi(t)$ *уравнения* (7) *имеет предел, принимающий одно из следующих возможных значений:*

$$\lim_{t\to+\infty}\xi(t)=c_0'=\begin{cases}0, & \text{либо } \gamma^{1/(\sigma-1)}\quad (0<\gamma\leqslant1),\ (S_1,S_2),\\ 0, & \text{либо } +\infty. \quad (S_3).\end{cases}$$

Доказательство леммы 2 основано на равенстве (8), лемме 1 и рассуждениях типа ([1]), стр. 175.

Вопрос о существовании решений с условием $c_0'=\gamma^{1/(\sigma-1)}$ решается применением теорем из ([5]). Для изучения решений с условием $c_0'=0$

(o-решений) в случае S_1, сначала допускаем, что такие решения есть, и понимая в (7) под $\xi(t)$ одно из o-решений, заменяем (7) «линейной» системой

$$d\eta/dt = \tilde{a}(t)\eta + \tilde{b}(t)\xi, \quad \tilde{a}(t) = -[1 + A(t)],$$
$$d\xi/dt = \eta, \quad \tilde{b}(t) = -A(t) + [1 + r(t)]\xi^{\sigma-1}. \tag{11}$$

Легко проверить, что если $\xi(t) > 0$ при всех t, начиная с некоторого, и $\xi(t) = o(1)$, то уравнение

$$d\lambda/dt = [1 + r(t)]\xi^{\sigma-1} + [1 - A(t)]\lambda - \lambda^2 \tag{12}$$

во всех случаях ($\gamma \leqslant 1$) допускает частное решение $\lambda(t) = o(1)$, а преобразование

$$\xi = \xi, \quad \eta = \pi(t)\xi + z, \quad \pi(t) = -1 + \lambda(t),$$

приводит (11) к виду

$$dz/dt = -[A(t) + \lambda(t)]z, \quad d\xi/dt = \pi(t)\xi + z,$$

откуда

$$\xi = \left[c_1 + c_2\int_{t_0}^{t} \exp\int_{t_0}^{\tau} -[\pi(\tau) + A(\tau) + \lambda(\tau)]\,d\tau\,d\tau\right]\exp\int_{t_0}^{t}\pi(\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

причем $c_2 = 0$, если $\gamma < 0$, ввиду свойства $\xi(t) = o(1)$.

Из (13) при $\gamma \neq 0$ получаются все возможные a-представления для $\xi(t)$ (здесь можно считать $\int_t^\infty |\lambda(t)|\,dt < +\infty$). Вопрос о фактическом существовании решений выясняется путем построения с помощью (12), (13) некоторых операторов и применением принципа Шаудера. Так же рассматривается и случай $\gamma = 0$, $c_2 = 0$. При $\gamma = 0$, $c_2 \neq 0$ можно лишь утверждать, что если соответствующие o-решения (o'-решения) есть, то для них выполняются свойства

$$\xi \sim \exp\int_{t_0}^{t} o(1)\,dt, \quad g = \xi + \xi' = \xi\,[1 + o(1)]. \tag{$14_{1,2}$}$$

После этого, полагая $\xi + \eta = g$, заменяем (11) системой

$$dg/dt = -A(t)g + \xi^\sigma[1 + r(t)], \quad d\xi/dt = g - \xi, \tag{$15_{1,2}$}$$

откуда, ввиду (14_2) и (15_1), получим для o'-решений свойство

$$dg/dt = -A(t)g + g^\sigma[1 + o(1)]. \tag{16}$$

Из (16) находим все возможные a-представления для $g(t)$, а затем исследуем вопрос о существовании решений с помощью операторов, построенных на основании (16), ($15_{1,2}$).

Случаи S_2, S_3 изучаются аналогично предыдущему, с использованием замены $\xi = A(t)^{1/(\sigma-1)}\omega$, где ω — новая неизвестная функция.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
1 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954. [2] И. Т. Кигурадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 35, 1, 15 (1964). [3] И. Т. Кигурадзе, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 5 965 (1965). [4] А. В. Костин, Дифференциальные уравнения, 4, № 7, 1184 (1968). [5] А. В. Костин, Дифференциальные уравнения, 1, № 5, 585 (1965).