

УДК 517.977

Д. С. КУЗЬМЕНКОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ЗА СИСТЕМОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 14. 11.2008)

Введение. Впервые понятия управляемости и наблюдаемости обыкновенных динамических систем ввел Р. Калман [1] в начале 1960-х годов. Согласно его принципу дуальности, задаче управляемости без учета ограничений на управляющие воздействия соответствует задача наблюдаемости, в которой полагается, что измерения выходного сигнала объекта наблюдения производятся с абсолютной точностью. Задачи оптимального наблюдения, в которых учитывается ограниченная точность измерений, стали исследоваться, начиная с [2]. Роль задач оптимального наблюдения выявляется при оптимальном управлении в условиях неопределенности.

Процессы, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, встречаются во многих приложениях [3]. Цель данной работы — описать метод оптимального наблюдения в реальном времени за тепловым процессом в стержне.

1. Постановка задачи. Пусть $l > 0$, t^* , $t^* > t^*$, — заданные константы; $\Omega = S \times T$, $S = [0, l]$, $T = [t^*, t^*]$; $a^2 \mu(t)$, $x_0(s)$, $s \in S$, $t \in T$, — непрерывные функции.

Рассмотрим тепловой процесс в стержне, описываемый уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \quad (s, t) \in \Omega; \\ \frac{\partial x}{\partial s}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s}(l, t) = -\mu(t)x(l, t), \quad t \in T; \\ x(s, t^*) &= x_0(s), \quad s \in S. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем считать, что неизвестное начальное состояние $x_0(s)$, $s \in S$, представимо в виде:

$$x_0(s) = x_0(s | w) = x_1(s) + \gamma'(s)w, \quad s \in S,$$

где $x_1(s) \in R$, $\gamma(s) \in R^{n_w}$, $s \in S$ — непрерывные функции; $w \in W = \{w \in R^{n_w}, d_* \leq w \leq d^*\}$ — ограниченное множество возможных значений неизвестного параметра w ; d_* , $d^* \in R^{n_w}$ — заданные векторы.

Множество W назовем *априорным распределением неизвестного параметра* w . Ему соответствует семейство $X_0 = X_0(\cdot) = \{x_0(\cdot | w), w \in W : x_0(\cdot | w) = (x_0(s | w), s \in S)\}$ — *априорное распределение* начального состояния.

Для уменьшения начальной неопределенности системы (1) в дискретные моменты времени будем вести наблюдение за изменением температуры в стержне при помощи измерительного устройства

$$y(t) = \int_0^l c(s, t)x(s, t)ds + \xi(t), \quad t \in T_h, \quad (2)$$

где $T_h = \{t^*, t^* + h_t, \dots, t^*\}$, $h_t = (t^* - t^*) / N$, N – натуральное число; $c(s, t) \in R$, $s \in S$, $t \in T_h$, – известная непрерывная функция; $\xi(t) \in R$, $t \in T_h$, – ошибки измерения, удовлетворяющие неравенствам:

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_h.$$

Пусть в процессе наблюдения записаны сигналы измерительного устройства

$$y(\cdot) = (y^*(t^*), y^*(t^* + h_t), \dots, y^*(t^*)) = (y^*(t), t \in T_h). \quad (3)$$

Множество $\widehat{W} = \widehat{W}(y(\cdot))$, соответствующее сигналу измерения $y(\cdot)$, назовем *апостериорным распределением параметра* w , если оно состоит из тех и только тех векторов $w \in W$, которые вместе с некоторыми ошибками $\xi(t)$, $t \in T_h$, способны породить сигналы (3). Множеству $\widehat{W}$ соответствует апостериорное распределение $\widehat{X}_0 = \widehat{X}_0(y(\cdot))$ начального состояния.

Задачу

$$\widehat{\alpha} = p'w^* = \max_{w \in \widehat{W}} p'w, \quad (4)$$

где p – заданный n -вектор, $\|p\| = 1$, назовем *линейной задачей апостериорного наблюдения*.

Вектор $w^* = w^*(y(\cdot))$ будем называть апостериорным решением задачи оптимального наблюдения, а $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}(y(\cdot))$ – оценкой апостериорного распределения.

Аппроксимируя систему (1) методом прямых, заменим ее на систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_t(s_1, t) = \bar{a}[x(s_2, t) - x(s_1, t)], \\ x_t(s_i, t) = \bar{a}[x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], i = \overline{2, n-1}; \\ x_t(s_n, t) = \bar{a}[x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \mu(t))x(s_n, t)], \\ x(s_i, t_*) = x_1(s_i) + \gamma(s_i)w, w \in W, i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

где $h_s = l / (n-1)$ – период квантования пространственной переменной, n – натуральное число; $s_i = ih_s$, $\bar{a} = a^2 / h_s^2$, $t \in T$; или в матричной форме:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_*) = x_1 + \Gamma \cdot w,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} -\bar{a} & \bar{a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{a} & -2\bar{a} & \bar{a} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a} & -2\bar{a} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a} & -(1 + h_s \mu(t))\bar{a} \end{pmatrix}, \quad x_1 = (x_1(s_i), i = \overline{1, n}), \quad \Gamma = (\gamma(s_i), i = \overline{1, n}) = (\gamma_{ik}, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n_w}).$$

Применяя формулу трапеций, аппроксимируем измерительное устройство (2) и получим

$$y(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) x(s_i, t) + \xi(t), \quad t \in T_h, \quad (6)$$

где $c(s_1, t) = c(s_i, t) / 2$, $c(s_n, t) = c(s_n, t) / 2$, $t \in T_h$.

Если известно апостериорное распределение $\widehat{W}$ параметра w начального состояния системы (5) (апостериорное распределение $\widehat{X}_0$ начального состояния системы (5)), то

можно отыскать текущее распределение $\widehat{W}(\tau)$ параметра w начального состояния системы для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$ (апостериорное распределение $\widehat{X}_0(\tau)$ текущего состояния $x(\tau)$):

$$\widehat{X}_0(\tau) = F(\tau, t_*) \widehat{X}_0 = \left\{ x \in R^n : x(s_i, \tau) = \sum_{j=1}^n f(s_i, \tau; s_j, t_*) x_0(s_j), x_0(s_j) \in \widehat{X}_0, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Здесь $F(t, t_*) = F(t)F^{-1}(t_*)$, $F(t)$, $t \in T$, – фундаментальная $n \times n$ -матрица решений системы (5); $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$.

С учетом вида множества $\widehat{X}_0(\tau)$ сигнал измерительного устройства (6) для параметра $w \in W$ начального состояния системы (5) и функции ошибок $\xi(t)$, $t \in T_h$, примет вид

$$y(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) (x_1(s_j) + \gamma(s_j)w) + \xi(t), t \in T_h. \quad (7)$$

Следовательно, при измеренном сигнале $y^*(t)$, $t \in T_h$, множество $\widehat{W}$ состоит из тех и только тех параметров $w \in R^n$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\xi_* \leq y^*(t) - h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) (x_1(s_j) + \gamma(s_j)w) \leq \xi^*, t \in T_h; w \in W.$$

Обозначим $\xi_*(t) = \xi_* - y^*(t) + h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_1(s_j)$, $\xi^*(t) = \xi^* - y^*(t) + h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_1(s_j)$, $d'(t) = -h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) \gamma(s_j)$, $t \in T_h$. В результате задача оптимального наблюдения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max, \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), t \in T_h, \\ d_* &\leq w \leq d^*. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Основные элементы двойственного метода. Для решения задач типа (8) будем использовать динамическую реализацию двойственного метода [4]. Приведем ее основные элементы.

1) регулярная опора $K_{on} = \{T_{on}, J_{on}\}$, $T_{on} \subset T_h, J_{on} \subset J$, $|T_{on}| = |J_{on}|$; 2) опорная матрица $D_{on} = (d_j(t), j \in J_{on}, t \in T_{on})$; 3) функция потенциалов $v(t)$, $t \in T_h$: $v(t) = 0$, $t \in T_h = T_h \setminus T_{on}$; $v'_{on} = v'(T_{on}) = (v(t), t \in T_{on}) = p'_{on} D_{on}^{-1}$, $p_{on} = p(J_{on}) = (p_j, j \in J_{on})$; если $K_{on} = \emptyset$, то $v(t) = 0$, $t \in T_h$; 4) вектор оценок $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$: $\Delta'_n = (\Delta_j, j \in J_n = J \setminus J_{on}) = p'_n - v'_{on} D_{on}^H$, $\Delta'_{on} = (\Delta_j, j \in J_{on}) = 0$, где $D_{on}^H = (d_j(t), j \in J_n, t \in T_{on})$, $p_n = p(J_n) = (p_j, j \in J_n)$; если $K_{on} = \emptyset$, то $\Delta = p$; 5) вектор псевдопараметров начального состояния κ и функция псевдоошибок $\zeta(t)$, $t \in T_h$. Сначала определим $\kappa_n = \kappa(J_n)$: $\kappa_j = d_{*j}$, если $\Delta_j < 0$; $\kappa_j = d_{*j}^*$, если $\Delta_j > 0$; $\kappa_j \in [d_{*j}, d_{*j}^*]$, если $\Delta_j = 0$; $j \in J_n$; и $\zeta_{on} = \zeta(T_{on})$: $\zeta(t) = \xi_*(t)$, если $v(t) < 0$; $\zeta(t) = \xi^*(t)$, если $v(t) > 0$; $\zeta(t) \in [\xi_*(t), \xi^*(t)]$, если $v(t) = 0$; $t \in T_{on}$. $\kappa_{on} = \kappa(J_{on})$ найдем из уравнения $\sum_{j \in J_{on}} d_j(t) \kappa_j = \zeta(t) - \zeta_0(t)$,

$t \in T_{on}$, где $\zeta_0(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \eta_0(s_i, t)$, $t \in T_{on}$; $\eta_0(t) = (\eta_0(s_i, t), i = \overline{1, n})$, $t \in T$, – псевдосостояние

измерительного устройства – решение системы (1) с начальным условием $x(t_*) = \Gamma \kappa^0$, где $\kappa^0 = (\kappa_{on}^0 = 0, \kappa_n^0 = \kappa_n)$. Функцией псевдоошибок назовем функцию $\zeta(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \eta(s_i, t)$, $t \in T_h$, где $\eta(t) = (\eta(s_i, t), i = \overline{1, n})$, $t \in T$, – псевдосостояние измерительного устройства – решение системы (1) с начальным условием $x(t_*) = \Gamma \kappa$; 6) множества точек минимума и максимума функции псевдоошибок $T_0^- = \{t \in \overline{T}_h = T_h \setminus \{t_*, t^*\} : \zeta(t) < \zeta(t - h_t), \zeta(t) < \zeta(t + h_t)\}$ и $T_0^+ = \{t \in \overline{T}_h : \zeta(t) > \zeta(t - h_t), \zeta(t) > \zeta(t + h_t)\}$; $T_0 = T_0^- \cup T_0^+$.

Двойственный метод [4] построения апостериорного решения задачи оптимального наблюдения (8) является итеративным. Он начинается с произвольной опоры $K_{оп}^1$ и заканчивается построением оптимальной опоры $K_{оп}^0$. Итерация представляет замену «старой» опоры $K_{оп}$ на «новую» $\bar{K}_{оп}$, при которой выполняется соотношение $p' \bar{\kappa} \leq p' \kappa$.

К началу каждой итерации сохраняем в памяти ЭВМ следующую информацию: 1) опору $K_{оп}$; 2) матрицу $D_{оп}$; 3) опорные значения функции потенциалов $v_{оп}$; 4) вектор оценок Δ ; 5) вектор псевдопараметров начального состояния κ ; 6) множества T_0^- , T_0^+ ; 7) значение матричной функции $F(t)$, $t \in T_0 \cup T_{on} \cup \{t_*, t^*\}$.

Основные выкладки итераций двойственного метода, используемого для решения задач типа (8), в данной статье не приводятся, с ними можно ознакомиться в [4, 5]. В конце каждой итерации после построения новой опоры $\bar{K}_{оп}$ видоизменяем информацию 2) – 7).

Двойственный метод, на итерациях которого преобразуется информация 1) – 7), конечен, если на его итерациях встречаются только регулярные опоры [4].

3. Квазидекомпозиция фундаментальной матрицы. Для предлагаемого метода оптимального наблюдения в реальном времени для больших значений n решающую роль играет быстрое вычисление значений фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T_h$. Опишем метод квазидекомпозиции для решения этой задачи.

Из вида измерительного устройства (7) следует, что если $c(s_i, t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $t \in T_h$, то необходимо знать i -ю строку фундаментальной матрицы. Так как фундаментальная матрица $F(t)$, $t \in T_h$, является симметричной, то ее строку можно вычислить за одно интегрирование системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже опишем процедуру квазидекомпозиции i -й строки фундаментальной матрицы $f(t) = (f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)) = (f_{i1}(t) \ f_{i2}(t) \ \dots \ f_{in}(t))$, $t \in T_h$ (с остальными строками необходимо поступать аналогичным образом).

Элементы $f(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{f}_1 = \bar{a}(f_2 - f_1), \dot{f}_i = \bar{a}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}), i = \overline{2, n-1}; \quad (9)$$

$$\dot{f}_n = \bar{a}(f_{n-1} - (1 + h_s v(t))f_n), f_i(t_*) = 0, i = \overline{1, n-1}, f_n(t_*) = 1.$$

Запишем функцию $f(t)$, $t \in T_h$, в виде $f(t) = (\alpha_0(t) \in R, f^1(t) \in R^m, \alpha_1(t) \in R, f^2(t) \in R^m, \dots, \alpha_{r-1}(t) \in R, f^r(t) \in R^m, \alpha_r(t) \in R)$, $t \in T_h$, где $\alpha_q(t) = f_{q(m+1)+1}(t)$, $q = \overline{0, r}$; $f^q(t) = (f_i^q(t), i = \overline{1, m}) = (f_{p+i}(t), i = \overline{1, m})$, $q = \overline{1, r}$; $t \in T_h$; выберем числа m , $p = (q-1)(m+1)+1$, $r = (n-1)/(m+1)$. Из матрицы коэффициентов уравнений (9) следует, что, зная значения функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T_h$, можно интегрирование системы порядка n заменить на параллельное интегрирование r систем порядка m :

$$\begin{aligned}\dot{f}_1^q &= \bar{a}(\alpha_{q-1}(t) - 2f_1^q + f_2^q), \dot{f}_i^q = \bar{a}(f_{i-1}^q - 2f_i^q + f_{i+1}^q), \quad i = \overline{2, m-1}; \\ \dot{f}_m^q &= \bar{a}(f_{m-1}^q - 2f_m^q + \alpha_q(t)), f_i^q(t^*) = f_{p+i}(t^*), \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in T_h, \quad q = \overline{1, r};\end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\dot{f}^q = Qf^q + \alpha^q(t), \quad f^q(t^*) = (f_{p+i}(t^*), i = \overline{1, m}), \quad t \in T_h, \quad q = \overline{1, r}, \quad (10)$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} -2\bar{a} & \bar{a} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a} & -2\bar{a} & \bar{a} & \dots & 0 \\ 0 & \bar{a} & -2\bar{a} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2\bar{a} \end{pmatrix}, \quad \alpha^q(t) = \begin{pmatrix} \bar{a}\alpha_{q-1}(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{a}\alpha_q(t) \end{pmatrix}.$$

Аппроксимируем функции $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T_h$, конечно-параметрическими функциями $\tilde{\alpha}_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T_h$. Обозначим через $\tilde{f}_i^q(t)$, $i = \overline{1, m}; q = \overline{1, r}; t \in T_h$, решения систем (10), в которых функции $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}; t \in T_h$, заменены на $\tilde{\alpha}_q(t)$, $q = \overline{0, r}; t \in T_h$.

Из непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такие аппроксимации функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}; t \in T_h$, что выполняются неравенства: $|\alpha_q(t) - \tilde{\alpha}_q(t)| \leq \varepsilon$, $q = \overline{0, r}; |f_i^q(t) - \tilde{f}_i^q(t)| \leq \varepsilon$, $q = \overline{1, r}; i = \overline{1, m}; t \in T_h$.

Функцию $\tilde{f}(t) = (\tilde{\alpha}_0(t), \tilde{f}^1(t), \tilde{\alpha}_1(t), \tilde{f}^2(t), \dots, \tilde{\alpha}_{r-1}(t), \tilde{f}^r(t), \tilde{\alpha}_r(t))$, $t \in T_h$, назовем *квазидеконпозицией* функции $f(t)$, $t \in T_h$.

Таким образом, процедура квазидеконпозиции фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T_h$, сводящаяся к квазидеконпозиции ее строк, позволяет параллельное интегрирование n систем порядка n заменить на параллельное интегрирование $n \cdot r$ систем порядка m .

4. Оптимальное наблюдение в реальном времени. Пусть $\tau \in T_h$ – текущий момент времени, $y_\tau(\cdot) = (y(t), t \in T_h(\tau))$, $T_h(\tau) = \{t^*, t^* + h_l, \dots, \tau\}$ – совокупность измерений, проведенных к моменту времени τ , $Y(\tau)$ – множество всех возможных сигналов $y_\tau(\cdot)$. Множество $\hat{W}(\tau) = \hat{W}(\tau, y_\tau(\cdot))$ будем называть *текущим распределением параметра w* для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$. Ему соответствует текущее распределение $\hat{X}_0(\tau) = \hat{X}_0(\tau, y_\tau(\cdot))$ начального состояния.

Семейство задач $\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot)) = p'w^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max_{w \in \hat{W}(\tau)} p'w$, $w \in \hat{W}(\tau)$, зависящих от выходных сигналов $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$ измерительного устройства и моментов $\tau \in T_h$, называется *задачей позиционного наблюдения*.

Функционал

$$w^0(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad y_\tau(\cdot) \in Y(\tau), \quad \tau \in T_h, \quad (11)$$

будем называть *решением задачи оптимального позиционного наблюдения* (позиционным решением задачи оптимального наблюдения).

Зная позиционное решение задачи оптимального наблюдения, можно получать информацию о поведении исследуемого объекта по ходу измерений. Для этого достаточно в каждый текущий момент времени $\tau \in T_h$, получив очередное измерение $y(\tau)$, составить вектор $y_\tau(\cdot)$, подставить его в (11) и получить оценку $\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot))$ текущего распределения $\hat{W}(\tau)$.

Построение позиционного решения (11) в замкнутой форме невозможно для нетривиальных случаев. Поэтому для нахождения позиционного решения задачи оптимального наблюдения используем принцип оптимального наблюдения в реальном времени. При этом функционал (11)

не строится заранее, а необходимые оценки вычисляются в процессе наблюдения по мере поступления измерений.

Пусть проведено наблюдение за системой (1) на промежутке $T_h(\tau)$, построен функционал (11). Введем следующие обозначения: $y_\tau^*(\cdot)$ – записанный сигнал измерительного устройства; $w^*(\tau) = w^*(\tau, y_\tau^*(\cdot))$, $\hat{\alpha}^*(\tau) = \hat{\alpha}^*(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ – экстремальное состояние и оценка для текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$. Реализациями позиционного решения задачи оптимального наблюдения назовем функции $w^*(\tau)$, $\hat{\alpha}^*(\tau)$, $\tau \in T_h$.

Опишем метод оптимального наблюдения в реальном времени, в котором при каждом $\tau \in T_h$ функции $w^*(\tau)$, $\hat{\alpha}^*(\tau)$ строятся за время, не превосходящее h_t , т. е. в режиме реального времени. Устройство, выполняющее эту работу, называется *оптимальным эстиматором*.

Оптимальный регулятор работает следующим образом. До начала процесса наблюдения эстиматор строит оценку $\alpha^*(t_* - 0)$ по решению $w^*(t_* - 0)$ задачи $\alpha^*(t_* - 0) = p'w^*(t_* - 0) = \max p'w, w \in W$, сохраняет в памяти ЭВМ оптимальную опору $K_{on}^0(t_* - 0)$ для последующих операций.

Пусть оптимальный эстиматор проработал в моменты $t_*, t_* + h_t, \dots, \tau$, вычислив при этом векторы $w^*(t)$, $x^*(t)$ и оценки $\hat{\alpha}^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$ на основе реализовавшихся сигналов $y_\tau^*(\cdot)$. В момент $\tau + h_t$ эстиматору становится известен сигнал $y^*(\tau + h_t)$ измерительного устройства, и он должен быстро подсчитать значения $w^*(\tau + h_t)$, $x^*(\tau + h_t)$, $\hat{\alpha}^*(\tau + h_t)$.

По предположению, в предыдущий момент τ оптимальный эстиматор уже решил задачу

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max; \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), \quad t \in T_h(\tau), \\ d_* &\leq w \leq d^*. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом он сохранил в памяти ЭВМ оптимальную опору задачи $K_{on}^0(\tau)$ и соответствующую ей информацию 2) – 7).

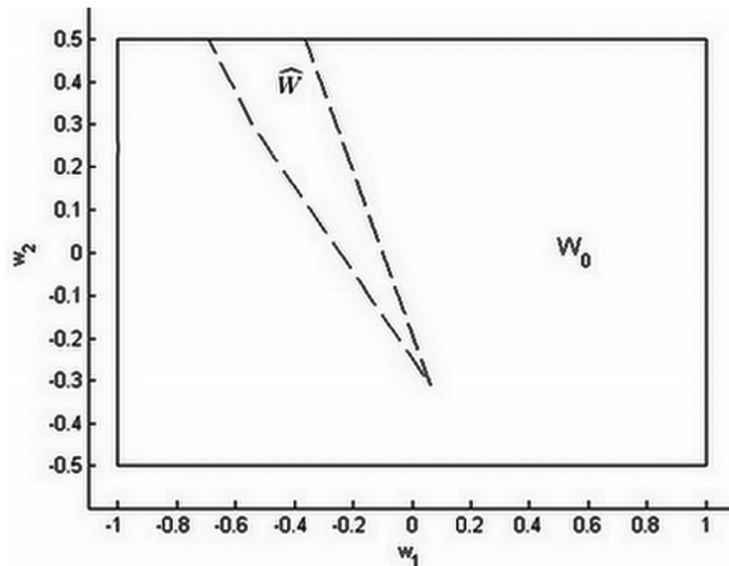
В момент $\tau + h_t$ оптимальный эстиматор должен решить задачу

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max; \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), \quad t \in T_h(\tau), \\ d_* &\leq w \leq d^*, \\ \xi_*(\tau + h_t) &\leq d'(\tau + h_t)w \leq \xi^*(\tau + h_t), \end{aligned} \quad (13)$$

которая отличается от задачи (12) наличием дополнительного ограничения в момент $\tau + h_t$.

Для решения задачи (13) в качестве начальной опоры $K_{on}(\tau + h_t)$ возьмем оптимальную опору $K_{on}^0(\tau)$ задачи (12). Тогда $v_{on}(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = v_{on}(\tau | K_{on}^0(\tau))$; $\Delta(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = \Delta(\tau | K_{on}^0(\tau))$; $\kappa(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = \kappa(\tau | K_{on}^0(\tau))$; $\zeta(t | K_{on}(\tau + h_t)) = \zeta(t | K_{on}^0(\tau))$, $t \in T_h(\tau)$; $\zeta(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, \tau + h_t) \eta(s_i, \tau + h_t)$, где $\xi_*(t) \leq \zeta(t | K_{on}(\tau + h_t)) \leq \xi^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$.

Если выполняются неравенства $\xi_*(\tau + h_t) \leq \zeta(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) \leq \xi^*(\tau + h_t)$, то $K_{on}^0(\tau)$ является оптимальной опорой задачи (13). Информацию 1) – 7), сохраненную для момента τ , пересохраняем для момента $\tau + h_t$. Иначе оптимальную опору $K_{on}^0(\tau + h_t)$ построим, используя двойственный метод, основные элементы которого описаны в п. 2.



Априорное и апостериорное распределения

5. Пример. Рассмотрим пример наблюдения за тепловым процессом в стержне на промежутке $T = [0, 3]$. Математическая модель исследуемой системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_t &= 0,125x_{ss}, (s, t) \in \Omega; \\ x_s(0, t) &= 0, x_s(1, t) = -0,01x(1, t), t \in T; \\ x(s, 0) &= w_1 + w_2s, s \in S; \end{aligned}$$

где $\Omega = S \times T$, $S = [0, 1]$; $T_h = \{0, h_t, 2h_t, \dots, 3 - h_t, 3\}$, $h_t = (3 - 0) / N$, N – натуральное число, w_1, w_2 – неизвестные параметры.

Пусть априорное распределение неизвестных параметров (в данном примере оно совпадает с априорным распределением начального состояния, так как $x_1(s) = 0$) W определяется соотношениями: $|w_1| \leq 1$, $|w_2| \leq 0.5$. Измерительное устройство измеряет температуру на правом конце стержня $x_n(t)$ с ограниченной ошибкой $|\xi(t)| \leq 0,25$, $t \in T_h$, т. е. в дискретные моменты времени $t \in T_h$ выдает сигнал $y(t) = x_n(t) + \xi(t)$.

Предположим, что неизвестное нам (истинное) начальное состояние системы равно

$$x(s, 0) = -0,5 + 0,25s, s \in S;$$

т. е. $w_1 = -0,5$, $w_2 = 0,25$, а реализовавшаяся (но не известная нам) функция ошибки измерительного устройства имеет вид: $\xi(t) = 0,25 \cos(t / 2)$.

На рисунке приведены априорное множество W_0 , граничные точки апостериорного множества $\widehat{W}(3)$, построенного по результатам наблюдения на отрезке $[0, 3]$. Граничные точки получены путем нахождения двойственным методом экстремальных состояний по направлениям $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi = i\pi / 18$, $i = \overline{0, 36}$.

Получены следующие результаты апостериорного решения двойственным методом для двух противоположных направлений: для вектора $p = (1, 0)$ оценка равна $\hat{\alpha}^* = -0,399244$, экстремальное начальное состояние принимает вид $x^* = -0,399244 + 0,149244s$; для $p = (-1, 0)$ $\hat{\alpha}^* = 0,693658$, $x^* = -0,693658 + 0,5s$.

Заключение. Предложенный метод оптимального наблюдения в реальном времени за тепловым процессом в стержне основан на динамической реализации двойственного метода [4]

и процедуре квазидекомпозиции, что позволяет быстро строить оценки текущего состояния теплового процесса. Полученные результаты могут быть обобщены на другие задачи оптимального наблюдения за системами с распределенными параметрами, а также могут быть использованы при оптимальном управлении системами с распределенными параметрами в условиях неопределенности.

Литература

1. Калман Р. // Тр. 1. Конгресса ИФАК. – М., 1961. С. 521 – 547.
2. Красовский Н. Н. // Прикл. мат. мех. 1964. Т. 28, № 1. С. 3 – 14.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., 1975.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Дмитрук Н. М. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 2. С. 35 – 46.

D. S. KUZMENKOV

OPTIMAL OBSERVATION OF PARABOLIC SYSTEM

Summary

An optimal observation problem of a thermal process in the rod in conditions of uncertainty is considered. The differential equation of parabolic type describing the process is approximated by large-scale differential equations. This problem is solved by a method of quasidecomposition, the algorithm of operation of the optimal estimator forming in real time estimations of a current state of a thermal process is described.