Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

МАТЕМАТИКА

ЛЮДМИЛА КЕЛДЫШ

ПСЕВДОИЗОТОПИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНО-ЗАУЗЛЕННЫХ ПРОСТЫХ ДУГ В E^3

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 III 1971)

1. В [5] мы показали, что всякая локально-незаузленная простая дуга l в трехмерном эвклидовом пространстве E^3 лежит на диске $D \subset E^3$, и в силу [4], [3] существует псевдоизотопия F_t: $E^3 \to E^3$, переводящая в l отрезок прямой $I = [a, b]$. Здесь мы показываем, что условие локальной незаузленности дуги **не необходимо** для существования такой псевдоизотопии. Строятся примеры диких дуг в E^3, имеющих точку локальной заузленности, которые получаются с помощью псевдоизотопии пространства E^3 из отрезка прямой. Для простой дуги l с нульмерным множеством точек дикости дано необходимое и достаточное условие для существования псевдоизотопии F_t: $E^3 \to E^3$, переводящей в l отрезок прямой. С помощью этого условия легко доказать несуществование такой псевдоизотопии для некоторых известных простых дуг.

Определения и обозначения. **Диском** называется топологический круг. Простая дуга $l \subset E^3$ называется **локально-заузленной** (л.з.) в точке $x \in l$, если никакая окрестность l_x точки x в l не лежит на диске, содержащемся в E^3. ∂D — край диска D. **Индексом** дуги l в точке $x \in l$, $\mathrm{Ind}_x l$, называется нижний предел числа точек пересечения дуги l со сколь угодно малой топологической сферой, внутри которой содержится точка x. **Псевдоизотопией** (**изотопией**) F_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, пространства E^3 на себя называется гомотопия, которая есть гомеоморфизм для всякого $t < 1$ $(t \leqslant 1)$. Псевдоизотопия F_t переводит множество $X \subset E^3$ в множество Y, если $F_1(X) = Y$ и $F_{1/X}$ и $F_{1/E_3 \setminus F^{-1}_1(Y)}$ — гомеоморфизмы. Композиция $\varphi_t \circ \psi_t$ гомотопий φ_t и ψ_t, где $\psi_0 = 1$ (тождественное отображение), определяется формулой

$$\varphi_t \circ \psi_t = \varphi_{2t}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \quad \varphi_t \circ \psi_t = \psi_{2t-1}(\varphi_1), \quad \text{если} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1.$$

$\bar{A}$ обозначает замыкание A, Λ — пустое множество.

Непрерывное разбиение G пространства E^3 называется **точечным**, если для любого элемента $\xi \in G$, $E^3 \setminus \xi$ гомеоморфно дополнению к точке в E^3. Непрерывное отображение f: $X \to Y$ называется **нульмерным** (**монотонным**), если прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$ нульмерен: $\dim f^{-1}(y) = 0$ (связен).

2. Примеры л.з. простых дуг, которые получаются псевдоизотопией F_t: $E^3 \to E^3$ из отрезка прямой $I = [a, b]$.

Пример 1. Дуга L есть сумма дуги l с одной точкой дикости в конце p и отрезка прямой $[p, q]$; $L = l \cup [p, q]$; $l \cap [p, q] = \{p\}$.

Пусть K — конус с вершиной p и основанием d_0, где d_0 — круг. Счетная последовательность кругов $\{d_n\}$, $n \geqslant 1$, параллельных d_0, делит K на последовательность цилиндров Π_n, сходящуюся к точке p. На параллельных диаметрах кругов d_n выбираем по три точки a_n, b_n, c_n так, чтобы все точки a_n лежали на отрезке прямой $[a_0, p]$. В каждом цилиндре Π_n проводим три непересекающихся ломаных λ_n^i, $i = 1, 2, 3$, где λ_n^1 соединяет точки a_n и c_{n+1}, λ_n^2 — точки b_n и c_n, а λ_n^3 — точки a_{n+1} и b_{n+1}, и контур $\lambda_n^1 \cup [c_{n+1}, b_{n+1}] \cup \lambda_n^3 \cup [a_{n+1}, a_n]$ ограничивает в Π_n диск Δ такой, что $\lambda_n^2 \cap \Delta = \Lambda$ и всякий лежащий в Π_n диск с краем $\lambda_n^2 \cup [b_n, c_n]$ пересекает Δ. Полагаем $l = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda_n^1 \cup \lambda_{n+1}^2 \cup \lambda_n^3) \cup \{p\}$ (рис. 1), l — простая дуга

локально-полиэдральная mod p (т. е. на $l \setminus \{p\}$). Так как в каждом цилиндре Π_n контуры $[b_n, c_n] \cup \lambda_n^2$ и $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cup \lambda_n^3$ зацеплены, то удовлетворяются условия теоремы Сиккема ([8]) и, следовательно, $\mathrm{Ind}_p\, l = 3$ и p — точка дикости для l. Пусть $[p, q]$ — отрезок прямой (a_0, p) и $[p, q] \cap K = \{p\}$. Дуга $L = l \cup [p, q]$ есть сумма дикой дуги и отрезка прямой с одной общей точкой и в силу ([7]) L не лежит на диске.

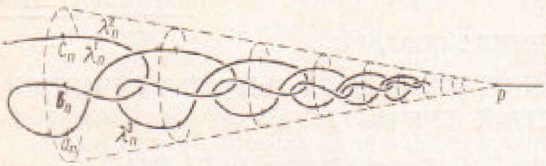

Рис. 1

Мы строим псевдоизотопию F_t: $E^3 \to E^3$, неподвижную на $E^3 \setminus K$ и переводящую отрезок $[a_0, p]$ в l, значит, $[a_0, q]$ — в L. Дугу l можно построить так, что $l \cap P = \{(a_n), p\}$ где P — плоский прямоугольник и $[a_0, q]$ — его сторона. Пусть l_{ab} — отрезок l между точками a и b. Каждый контур $[a_n, a_{n+1}] \cup l_{a_n a_{n+1}}$ ограничивает в $\Pi_n \cup \Pi_{n+1}$ диск Δ_n такой, что $\Delta_n \cap P = [a_n, a_{n+1}]$; $\mathrm{int}\, \Delta_n \cap l = \Delta_n \cap (\lambda'_{n+1} \cup \lambda^3_{n+1})$ — пара точек. Выбираем последовательность дисков $\delta_n \subset P \cap \Pi_n$ так, что $\delta_n \cap [a_0, p] = [a_n, a_{n+1}]$; $\delta_n \cap \delta_{n+1} = \{a_{n+1}\}$; $\delta_n \cap \delta_m = \Lambda$; $|n - m| > 1$. Тогда $\Delta_n' = \delta_n \cup \Delta_n$ — диск. Для каждого $\Delta_n' \setminus \{a_n\} \setminus \{a_{n+1}\}$ выбираем окрестность $U_n \subset \Pi_n \cup \Pi_{n+1}$, так что $U_n \cap l_{a_0 a_n} = \Lambda$; $U_n \cap \delta_m = \Lambda$, если $n \neq m$, и строим последовательность изотопий φ_t^n: $E^3 \to E^3$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi_0^n = 1; \quad \varphi^n_{\substack{t/E^3 \setminus U_n \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} = 1; \quad \varphi_1^n(\delta_n) = \Delta_n'; \quad \varphi_1^n([a_n, \ a_{n+1}]) = l_{a_n a_{n+1}}.$$

Полагая $\Phi_t^n = \Phi_t^{n-1} \circ \varphi_t^n = \varphi_t^0 \circ \ldots \circ \varphi_t^n$ и замечая, что последовательность гомеоморфизмов $\Phi^n{}_1$ удовлетворяет условиям леммы 1 из ([4]), получаем требуемую псевдоизотопию F_t: $E^3 \to E^3$, переводящую $[a_0, p]$ в l и $[a_0, q]$ в L, как предел изотопий Φ_t^n.

П р и м е р 2. Дуга l есть сумма двух ручных дуг с одним общим концом p. Как в примере 1, рассматриваем конус K, диски d_n и цилиндры Π_n. На параллельных диаметрах дисков d_n выбираем по три точки a_n, b_n, c_n и точку g_n — для четных n с одной стороны от диаметра d_n, содержащего $[a_n, c_n]$, а для нечетных — с другой, причем все точки g_{2n} (g_{2n+1}) лежат на отрезке прямой $[g_0, p]$ ($[g_1, p]$). Так же, как в примере 1, строим в Π_n ломаные $\lambda_n^1 = l_{g_n c_{n+1}}$, $\lambda_n^2 = l_{c_n b_n}$ и $\lambda_n^3 = l_{b_{n+1} a_{n+1}}$ и затем $\lambda_n^4 = l_{a_n g_{n+1}}$, не зацепленную в Π_n ни с какой λ_n^i, $i \leqslant 3$. Полагаем $l_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda^1_{2n-i} \cup \lambda^2_{2n-i+1} \cup \lambda^3_{2n-i} \cup \lambda^4_{2n-i+1}) \cup \{p\}$, $i = 0, 1$; $l = l_0 \cup l_1$ (рис. 2). Обе

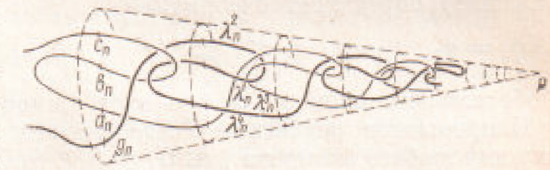

Рис. 2

l_i — ручные дуги и l локально полиэдральна mod p. В силу ([8]), $\mathrm{Ind}_p\, l = 4$, значит, l — дикая дуга. В силу леммы 2 в ([5]) дикая дуга, являющаяся суммой двух ручных, не лежит на диске, значит, l — л.з. в точке p. Пусть диск $D = P_0 \cup P_1$ есть сумма двух прямоугольников, причем $\partial P_i \supset [g_i, p]$, $D \cap l = \{(g_n), p\}$, $n = 0, 1, \ldots$, $P_0 \cap P_1$ — отрезок прямой.

Псевдоизотопия F_t: $E^3 \to E^3$, переводящая $[g_0, p] \cup [p, g_1]$ в l, строится аналогично примеру 1, причем отрезки $[g_n, g_{n+2}]$ последовательно переводятся в отрезки $l_{g_n g_{n+2}}$ дуги l, а области U_n выбираются так, что $U_{2n-i} \cap l_{1-i} \subset \Pi_{2n-i+1}$, $i = 0, 1$.

3. Простые дуги с нульмерным множеством точек дикости.

Теорема. *Для того чтобы для простой дуги $l \subset E^3$ с нульмерным множеством $\mathscr{E}$ точек дикости существовала псевдоизотопия $F_t\colon E^3 \to E^3$, переводящая в l отрезок прямой I такая, что $F_0 = 1$; $F_{1/I}$ и $F_{1/E^3\setminus F_1(\mathscr{E})}$ — гомеоморфизмы, необходимо и достаточно, чтобы дуга l лежала на континууме $C \subset E^3$, где C — нульмерный непрерывный образ диска, $C = f(D)$, $\bar{S} \subset \mathscr{E}$, где S — сингулярное множество для f, $f \,/\, \partial D$ — гомеоморфизм и $l \subset f(\partial D)$.*

Мы приводим здесь идею доказательства. Необходимость основана на лемме, которая является усилением теоремы 8 об эквивалентных непрерывных разбиениях ([1]) применительно к вложению отрезка в E^3.

Лемма. *Пусть G — точечное непрерывное разбиение пространства E^3 и замыкание множества $\mathscr{E}_G$ невырожденных элементов разбиения G есть нульмерный компакт в E^3 / G. Если каждый невырожденный элемент G пересекает отрезок прямой I в единственной точке, то существует непрерывное разбиение H пространства E^3, все невырожденные элементы которого — одномерные континуумы и H / I — гомеоморфизм, и гомеоморфное отображение h пространства E^3 / G на E^3 / H такое, что $h(\overline{\mathscr{E}}_G) \supset \overline{\mathscr{E}}_H$ и $h(I / G) = I / H$.*

Если $E^3 / G = E^3$, то гомеоморфизмы G / I и H / I определяют эквивалентные вложения отрезка I в E^3. Пусть $F_t\colon E^3 \to E^3$ — псевдоизотопия, удовлетворяющая условиям теоремы, и $F_1(I) = l$. В силу (6) непрерывное отображение F_1 точечно и, значит, существует $\Phi\colon E^3 \to E^3$, удовлетворяющее условиям леммы. Тогда для любой точки $x \in E^3$ $\dim \Phi^{-1}(x) \leqslant 1$ и $E^3 \setminus \Phi^{-1}(x)$ гомеоморфно $E^3 \setminus x$. Поэтому для любой плоскости E^2, $I \subset E^2 \subset E^3$, и точки $x \in E^3$ компоненты $\Phi^{-1}(x) \cap E^2$ не разбивают E^2. Заметив, что $\Phi / E^2 = \psi\varphi$, где φ монотонно, а ψ нульмерно и $\varphi(E^2)$ гомеоморфно E^2, находим диск $D \subset \varphi(E^2)$ такой, что $C = h^{-1}\psi(D)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Для доказательства достаточности, выбросив из удовлетворяющего условиям теоремы $C \supset l$ $(1/n)$-окрестность множества $\mathscr{E}$ точек дикости дуги l, получаем диск с конечным числом отверстий, P_n, который можно считать локально полиэдральным $\mathrm{mod}(P_n \cap l)$. С помощью леммы Дена строим, отправляясь от компактов P_n, последовательность ручных дисков D_n, где D_n отличается от C лишь в $(1/n)$-окрестности множества $\mathscr{E}$, и последовательность изотопий, переводящих D_n в D_{n+1}, неподвижных вне $(1/n)$-окрестности $\mathscr{E}$. Обозначив через D_0 прямоугольник и через I его сторону и применяя лемму 1 из ([4]), строим псевдоизотопию $F_t\colon E^3 \to E^3$, переводящую I в l.

Следствие. *Для того чтобы для простой дуги $l \subset E^3$ с нульмерным множеством $\mathscr{E}$ точек дикости существовала псевдоизотопия $F_t\colon E^3 \to E^3$, переводящая в l отрезок прямой и удовлетворяющая условиям теоремы, необходимо и достаточно, чтобы дуга l лежала на компакте $C \subset E^3$, который для любого $\varepsilon > 0$ отличается от некоторого диска D_ε лишь в ε-окрестности множества $\mathscr{E}$.*

Это вытекает из доказательства теоремы.

Покажем, что не существует псевдоизотопии E^3, переводящей отрезок прямой в дугу L, пример 1.4 ([2]), которая является суммой двух ручных дуг. Если бы такая псевдоизотопия существовала, то $L \subset C$, где C при любом $\varepsilon > 0$ отличается от некоторого диска D_ε лишь внутри ε-окрестности $O_\varepsilon(p)$ единственной точки дикости p. Но тогда $\partial D_\varepsilon \supset L \setminus O_\varepsilon(p)$, что невозможно, так как для достаточно малого ε ∂D_ε был бы узлом.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] St. Armentrout, L. Linniger, D. Meyer, Pacif. J. Math., 24, № 2, 205 (1968). [2] E. Artin, R. H. Fox, Ann. Math., 49, 979 (1948). [3] R. Craggs, Fund. Math., 68, 225 (1970). [4] Л. В. Келдыш, Матем. сборн., 71 (113), 433 (1966). [5] Л. В. Келдыш, Матем. сборн., 81 (123), 279 (1970). [6] В. П. Компанеец, Укр. матем. журн., 17, № 6, 100 (1965). [7] C. D. Sikkema, Trans. Ann. Math. Soc., 122, № 2, 399 (1966). [8] C. D. Sikkema, Notices, 17, № 7, Abstr. 679 (1970).