Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Р. Н. МИРОШИН

О КОНЕЧНОСТИ МОМЕНТОВ ЧИСЛА НУЛЕЙ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 1 III 1971)

Назовем гауссовский стационарный процесс ξ_t, $M\xi_t = 0$, $(2, \beta)$-процессом, если его спектральная функция имеет непрерывную компоненту, а корреляционная функция $p(\tau) = M\xi_t\xi_{t+\tau}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\tau\downarrow 0} \frac{p''(\tau) - p''(0)}{\tau^\beta} = \frac{b_1}{\Gamma(1+\beta)}, \tag{1}$$

где $0 < b_1 < \infty$, $|p''(0)| < \infty$. Необходимо $0 < \beta \leqslant 2$.

Как известно [1, 2], m-й факториальный момент $N_m^+(T, a)$ числа пересечений снизу вверх уровня a гауссовским стационарным процессом ξ_t, $M\xi_t = 0$, на отрезке $[0, T]$ равен

$$N_m^+(T, a) = m! \int\limits_{\{0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_m\leqslant T\}} M\left\{\prod_{i=1,\ldots,m} \dot\xi_{t_i}^+ \mid \xi_{t_j} = a,\ j = 1, \ldots, m\right\} \times$$
$$\times\, p_{t_1\ldots t_m}(a, \ldots, a) \prod_{i=1,\ldots,m} dt_i, \tag{2}$$

где $p_{t_1\ldots t_m}(x_1, \ldots, x_m)$ — плотность совместного распределения величин ξ_{t_i}, $i = 1, \ldots, m$, с ковариационной матрицей $R_{11}(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $\dot\xi_{t_i} = d\xi_{t_i}/dt_i$, $\eta^+ = {}^1/_2(\eta + |\eta|)$.

В [3] утверждается, что процессы, выборочная производная $(k-1)$-го порядка которых является $(2,1)$-процессом, имеют конечные моменты $N_m^+(T, a)$ тогда и только тогда, когда $m \leqslant k^2 + 2k$. Однако уже у $(2,1)$-процесса, вопреки этому утверждению, конечен момент $N_4^+(\varepsilon, 0)$, поскольку ($C = C(b_1) = \mathrm{const}$, $\varepsilon < 1$)

$$CN_4^+(\varepsilon, 0) \leqslant {}^1/_8 \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3\, [\tau_1\tau_2\tau_3(\tau_1+\tau_2)(\tau_2+\tau_3)]^{-1/2} \leqslant (\ln 3e)^2 + 1.$$

В действительности справедлива

Теорема 1. *При $T < \infty$ у $(2, \beta)$-процесса, $\beta < 2$, конечны все факториальные моменты $N_m^+(T, 0) \equiv N_m^+(T)$.*

Не уменьшая общности, полагаем $p(0) = -p''(0) = 1$.

Лемма 1 (см. [1]). *Для того чтобы $N_m^+(\varepsilon) < \infty$, достаточно $I_m(\varepsilon) < \infty$, где*

$$I_m(\varepsilon) = \int\limits_{\{0\leqslant t_1<\ldots\leqslant t_m\leqslant\varepsilon\}} |R_{11}(t_1, t_2, \ldots, t_m)|^{-1/2} \prod_{i=1,\ldots,m} \sigma_i\, dt_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\sigma_i^2 = D\{\dot\xi_{t_i} \mid \xi_{t_j} = 0,\quad j = 1, \ldots, m\}.$$

Лемма 2. *Для $(2, \beta)$-процесса, $\beta < 2$, $m \geqslant 3$,*

$$\lim |R_{11}(t_1, \ldots, t_m)| \prod_{i=2,\ldots,m} (t_i - t_{i-1})^{-2} \prod_{i=3,\ldots,m} (t_i - t_{i-2})^{-\beta} \geqslant \{b_1 \min_{0\leqslant\theta\leqslant 1} f_\beta(\theta)\}^{m-2}, \tag{3}$$

где $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant \varepsilon$, $f_\beta(\theta)\theta(1-\theta)\Gamma(3+\beta) = 2[1-\theta^{1+\beta} - (1-\theta)^{1+\beta}]$, $\theta_i = (t_i - t_{i-1})/(t_i - t_{i-2})$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, *а под* $\lim$ *понимается переход к пределу при* $t_m - t_1 \to 0$.

Доказательство. Вычтем из каждого i-го столбца в $|R_{11}|$ $(i-1)$-й столбец, $i \geqslant 2$, и поделим на $t_i - t_{i-1}$, а из каждой j-й строки вычтем $(j-1)$-ю, $j \geqslant 2$, и поделим на $t_j - t_{j-1}$. В полученном $|R_{11}^{(1)}| = \det\{p_{ij}^{(1)}\}$ из каждого i-го столбца, $i \geqslant 3$, вычтем $(i-1)$-й и поделим на $(t_i - t_{i-2})^{\beta/2}$. То же делаем со строками. Преобразованный определитель $|R_{11}^{(2)}| = \det\{p_{ij}^{(2)}\}$ имеет следующие элементы:

$$p_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(1)}, \quad i, j \leqslant 2; \quad p_{1i}^{(2)} = (p_{1i}^{(1)} - p_{1i-1}^{(1)})(t_i - t_{i-2})^{-\beta/2}, \quad i \geqslant 3;$$

$$p_{2i}^{(2)} = \{L_{2i}[p](t_i - t_{i-1})^{-1} -$$

$$- L_{2i-1}[p](t_{i-1} - t_{i-2})^{-1}\}(t_2 - t_1)^{-1}(t_i - t_{i-2})^{-\beta/2}, \qquad i \geqslant 3;$$

$$p_{ji}^{(2)} = (t_i - t_{i-2})^{-\beta/2}(t_j - t_{j-2})^{-\beta/2} L_{ji}[p^{(1)}], \quad i, j \geqslant 3; \quad p_{ij}^{(2)} = p_{ji}^{(2)};$$

где

$$p_{ij}^{(1)} = p_{ji}^{(1)}, \; p_{1i}^{(1)} = (p_{1i} - p_{1i-1})(t_i - t_{i-1})^{-1}, \quad i \geqslant 2, \quad p_{11}^{(1)} = 1,$$

$$p_{ij} = p(t_j - t_i), \; p_{ij}^{(1)} = L_{ij}[p](t_j - t_{j-1})^{-1}(t_i - t_{i-1})^{-1}, \quad i, j \geqslant 2,$$

$$L_{ij}[x] = x_{ij} - x_{ij-1} - x_{i-1j} + x_{i-1\,j-1}.$$

Переходя к пределу при $t_m - t_1 \to 0$, получаем

$$\lim p_{11}^{(2)} = p(0) = 1, \quad \lim p_{22}^{(2)} = -p^{11}(0) = 1,$$

$$\lim p_{ij}^{(2)} = 0, \quad i \neq j, \quad \lim p_{jj}^{(2)} = b_1 f_\beta(\theta_j),$$

откуда и следует (3).

Лемма 3. *При* $0 < \beta < 2$

$$\min_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} f_\beta(\theta) = C_f > 0,$$

в частности, $3f_1(\theta) = 2$.

Лемма 4.

$$\sigma_i^2 \leqslant 1 - \dot{p}_{ii+1}^2/(1 - p_{ii+1}^2), \quad \sigma_m^2 \leqslant 1.$$

Доказательство. Для диагональных элементов σ_i^2 условной корреляционной матрицы величин ξ_{t_i} при условии $\xi_{t_j} = 0$, $j = 1, \ldots, m$, имеем $\sigma_i^2 = 1 - \eta' R_{11}^{-1}\eta$, где $\eta' = (-\dot{p}_{1i}, \ldots, -\dot{p}_{i-1,i}, 0, \dot{p}_{i+1,i}, \ldots, \dot{p}_{mi})$. Приводя форму $L = \eta' R_{11}^{-1}\eta$ к сумме квадратов, находим

$$L = \dot{p}_{i+1,i}^{\,2}|P_{m-1}|/|P_{m-2}| + B^2 \geqslant \dot{p}_{i+1,i}^{\,2}|P_{m-1}|/|P_{m-2}|. \tag{4}$$

Минор $|P_{m-1}|$ получен вычеркиванием $(i+1)$-й строки и $(i+1)$-го столбца из $|R_{11}^{-1}|$, минор $|P_{m-2}|$ — вычеркиванием i-й строки и i-го столбца из $|P_{m-1}|$. Утверждение леммы следует теперь из (4) и того, что $|P_{m-1}| = |R_{11}|^{-1}$, $|P_{m-2}| = |R_{11}|^{-1}(1 - p_{i\,i+1}^{2})$.

Лемма 5. *Для* $(2, \beta)$*-процесса*, $\beta < 2$,

$$\lim \sigma_i^2 |t_{i+1} - t_i|^{-\beta} \leqslant 2b_1(1+\beta)/\Gamma(3+\beta).$$

Обозначим

$$K_{m+1} = \int_0^1 (m) \int_0^1 \prod_{i=2,\ldots,m} (\tau_i + \tau_{i-1})^{-\beta/2} \prod_{i=1,\ldots,m} \tau_i^{\beta/2-1}\, d\tau_i. \tag{5}$$

Лемма 6. *При* $0 < \beta < 2$

$$K_2 < \infty, \; K_3 = \int_0^1\int_0^1 d\tau_1\, d\tau_2\, (\tau_1\tau_2)^{\beta/2-1}(\tau_1 + \tau_2)^{-\beta/2} < \infty.$$

Лемма 7. *При* $0 < \beta < 2$ *из утверждения* $K_l < \infty$, $l = 2, \ldots, m$, *вытекает утверждение* $K_{m+1} < \infty$.

Доказательство. Перейдем в (5) к полярным координатам (r, φ_i, $i = 1, \ldots, m-1$):

$$K_{m+1} \leqslant C \int_0^{\pi/2} (m-1) \int (\cos\varphi_{m-1} + \sin\varphi_{m-1})^{-\beta/2} f_{m-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{m-1},$$

где

$$C = \frac{2}{\beta}\, 2^{1-\beta/2} m^{\beta/4},$$

$$f_{m-1} = (\sin 2\varphi_{m-1})^{\beta/2-1} \prod_{i=1,\ldots,m-2} (\cos\varphi_i + \sin\varphi_i \cos\varphi_{i+1})^{-\beta/2} (\sin 2\varphi_i)^{\beta/2-1}.$$

Особенности f_{m-1} — точки $\varphi_i = 0$ и $\varphi_i = \pi/2$. Если $\varphi_i \sim 0$, сомножитель в f_{m-1}, зависящий от φ_i, имеет порядок $\varphi_i^{\beta/2-1}$, так что интеграл K_{m+1} сходится. То же справедливо для точек $\varphi_i = \pi/2$, $\varphi_{i+1} < \pi/2$. Если же $\varphi_i = \varphi_{i+1} = \pi/2$, то $\cos\varphi_i + \sin\varphi_i \cos\varphi_{i+1} \sim x_i + x_{i+1}$, $\sin 2\varphi_i \sin 2\varphi_{i+1} \sim 4x_i x_{i+1}$, где $x_i = \pi/2 - \varphi_i$, и мы приходим к одному из интегралов K_l при $2 \leqslant l \leqslant m$.

Доказательство теоремы 1. Так как $T < \infty$ и процесс имеет непрерывную компоненту в спектре, достаточно исследовать сходимость интеграла (2) в окрестности точек $|t_i - t_j| \to 0$. Ограничимся случаем $t_m - t_1 \to 0$. Остальные доказываются аналогично. Вследствие лемм 2—5 к интегралу K_{m+1} приводится подстановкой $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ мажоранта для интеграла $I_{m+1}(\varepsilon)$. Из лемм 6—7 имеем по индукции $K_{m+1} < \infty$ при всех $m \geqslant 1$ и $0 < \beta < 2$. Поэтому $I_{m+1}(\varepsilon) < \infty$, т. е. $N_{m+1} < \infty$ (см. лемму 1).

Теорема 2. *Если гауссовский стационарный процесс ξ_t, $M\xi_t = 0$, имеет производную $(k-1)$-го порядка, которая является $(2, \beta)$-процессом, $0 < \beta < 2$, то $N_m^+(T, 0) < \infty$ при всех $m \geqslant 1$ и $T < \infty$.*

Доказательство. При $m \leqslant k$ теорема доказана в ([1]). Пусть $m \geqslant k+1$. Ограничиваясь снова случаем $t_m - t_1 \to 0$, $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots \ldots < t_m \leqslant \varepsilon$, нетрудно показать, незначительно модифицировав рассуждения в ([1, 3]) и в леммах 2—3, что при $t_m - t_1 \to 0$

$$|R_{11}(t_1, \ldots, t_m)| \geqslant$$
$$\geqslant C \prod_{l=1,\ldots,k}\ \prod_{i=l+1,\ldots,m} (t_i - t_{i-l})^2 \prod_{i=k+2,\ldots,m} (t_i - t_{i-k-1})^\beta, \quad C > 0,$$

$$\sigma_i^2 \leqslant \begin{cases} C_i \prod\limits_{l=1,\ldots,i-1} (t_i - t_{i-l})^2, & 2 \leqslant i \leqslant k, \quad C_i < \infty, \\ C_{ii} \prod\limits_{l=1,\ldots,k-1} (t_i - t_{i-l})^2 (t_i - t_{i-k})^\beta, & i \geqslant k+1,\ C_{ii} < \infty, \\ 1, & i = 1. \end{cases}$$

Поэтому, полагая $t_{i+k} - t_i = \tau_i$, имеем

$$I_m(\varepsilon) \leqslant C_m K_{m+1-k}. \tag{6}$$

Вследствие лемм 6—7 получаем из (6) $I_m(\varepsilon) < \infty$ при любом $m \geqslant k+1$, откуда и вытекает утверждение теоремы (см. лемму 1).

Аналогично доказывается

Теорема 3. *Для гауссовского стационарного процесса, производная k-го порядка которого является $(2, \beta)$-процессом, $0 < \beta < 2$, конечны все факториальные моменты числа пересечений фиксированного уровня a на конечном интервале времени.*

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
23 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. К. Беляев, Теория вероятностей и ее применения, 11, 1, 120 (1966).
[2] Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные случайные процессы, М., 1969.
[3] В. И. Питербарг, ДАН, 182, № 1, 46 (1968).