МАТЕМАТИКА

УДК 512.548 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64
EDN: CRZWMH

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. III

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POLYADIC ANALOGUES OF NORMAL SUBGROUPS IN POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. III

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. В статье продолжается изучение полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *полуинвариантные l-арные подгруппы*, *n-полуинвариантные l-арные подгруппы*.

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. III / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 64–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64. – EDN: CRZWMH

Abstract. The study on the polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form is carried on.

Keywords: *polyadic operation*, *semiinvariant l-ary subgroups*, *n-semiinvariant l-ary subgroups*.

For citation: *Gal'mak*, *A.M.* Polyadic analogues of normal subgroups in polyadic groups of special form. III / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 64–66. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_64 (in Russian). – EDN: CRZWMH

Введение

Данная статья, посвящённая изучению полиадических аналогов нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида, является продолжением статей [1], [2] и составляет с ними единое целое. В связи с этим нумерация разделов в настоящей статье продолжает нумерацию разделов в [2]. Сохраняется преемственность в отношении соглашений, определений и обозначений из [1], [2], все они остаются в силе и в новой статье. В ней ссылки на результаты из работ [1], [2] даются без указания на эти работы. Например, ссылка на следствие 5.1 означает, что имеется в виду следствие 5.1 из раздела 5 в [2].

6 Условия полуинвариантности, но не *n*-полуинвариантности

***Теорема* 6.1**. *Пусть подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа полуабелевой n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *полуинвариантна*, *но не n-полуинвариантна в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *которая не является n-полуабелевой*.

Доказательство. n-Арная подгруппа $< B, \eta >$ полуабелевой n-арной группы $< A, \eta >$ является полуинвариантной в ней. Поэтому, согласно утверждению 2) теорем 3.1, l-арная подгруппа $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ полуинвариантна в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, а согласно утверждению 2) следствия 5.1 $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуинвариантной в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Тогда по теореме 4.5 из [3] $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – полуабелева l-арная группа, не являющаяся n-полуабелевой. □

***Замечание* 6.1.** В доказательстве теоремы 6.1 полуинвариантность $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ может быть получена как следствие полуабелевости $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Кроме того, если в теореме 6.1 $< B, \eta >$ – неодноэлементная n-арная подгруппа, то l-арная подгруппа $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является полуабелевой, но не n-полуабелевой. Это следует из теоремы 4.5 из [3] ввиду полуабелевости $< B, \eta >$.

Полагая в теореме 6.1 $n = 2$, получим

***Следствие* 6.1**. *Пусть нетождественная подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, B – *подгруппа абелевой группы* A, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *полуинвариантна*, *но не инвариантна в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$, *которая не является абелевой*.

Ясно, что в теореме 6.1 σ – нетождественная подстановка. Если при этом подстановка σ^n

является тождественной, $s = n$, то получим приведённую ниже теорему.

***Теорема* 6.2.** *Пусть для нетождественной подстановки* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *подстановка* σ^n *является тождественной,* $l = n(n-1)+1$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа полуабелевой n-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{n,\sigma,k} >$ *полуинвариантна, но не n-полуинвариантна в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, \eta_{n,\sigma,k} >$, *которая не является n-полуабелевой.*

***Замечание* 6.2.** Если в теореме 6.2 $< B, \eta >$ – неодноэлементная n-арная подгруппа, то l-арная подгруппа $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является полуабелевой, но не n-полуабелевой. Это следует из теоремы 4.5 из [3] ввиду полуабелевости $< B, \eta >$.

Следующее следствие вытекает из теоремы 6.2, если в ней положить σ – цикл длины $k \geq 2$ из $\mathbf{S}_k$, $n = k$.

***Следствие* 6.2.** *Пусть* $l = k(k-1)+1$, σ – *цикл длины* $k \geq 2$ *из* $\mathbf{S}_k$, $< B, \eta >$ – *k-арная подгруппа полуабелевой k-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{k,\sigma,k} >$ *полуинвариантна, но не k-полуинвариантна в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, \eta_{k,\sigma,k} >$, *которая не является k-полуабелевой.*

Полагая в следствии 6.2 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

***Следствие* 6.3.** *Пусть* $l = k(k-1)+1$, $< B, \eta >$ – *k-арная подгруппа полуабелевой k-арной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{k,(12\ldots k),k} >$ *полуинвариантна, но не k-полуинвариантна в полуабелевой l-арной группе* $< A^k, \eta_{k,(12\ldots k),k} >$, *которая не является k-полуабелевой.*

Полагая в следствиях 6.2 и 6.3 $k = 3$, получим ещё два следствия.

***Следствие* 6.4.** *Пусть* σ – *цикл длины* 3 *из* $\mathbf{S}_3$, $< B, \eta >$ – *тернарная подгруппа полуабелевой тернарной группы* $< A, \eta >$, $B \neq A$. *Тогда* 7-*арная подгруппа* $< B^k, \eta_{3,\sigma,3} >$ *полуинвариантна, но не* 3-*полуинвариантна в полуабелевой* 7-*арной группе* $< A^k, \eta_{3,\sigma,3} >$, *которая не является* 3-*полуабелевой.*

***Следствие* 6.5.** *Пусть* $< B, \eta >$ – *тернарная подгруппа полуабелевой тернарной группы* $< A, \eta >$, *где* $B \neq A$. *Тогда* 7-*арная подгруппа* $< B^k, \eta_{3,(123),3} >$ *полуинвариантна, но не* 3-*полуинвариантна в полуабелевой* 7-*арной группе* $< A^k, \eta_{3,(123),3} >$, *которая не является* 3-*полуабелевой.*

7 Случай тождественной подстановки

Согласно утверждению 1) следствия 5.1, l-арная подгруппа $< B^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ может быть инвариантной в ней только в случае тождественности подстановки σ. Следующая теорема показывает, что это действительно так.

***Теорема* 7.1.** *Если* ε – *тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *то l-арная подгруппа* $< B^k, \eta_{s,\varepsilon,k} >$ *инвариантна в l-арной группе* $< A^k, \eta_{s,\varepsilon,k} >$ *тогда и только тогда, когда n-арная подгруппа* $< B, \eta >$ *инвариантна в n-арной группе* $< A, \eta >$.

Необходимость. Инвариантность $< B^k, \eta_{s,\varepsilon,k} >$ в $< A^k, \eta_{s,\varepsilon,k} >$ означает, что

$$\eta_{s,\varepsilon,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\varepsilon,k}(\underbrace{B^k \ldots B^k}_{t-1}\,\mathbf{x}\,\underbrace{B^k \ldots B^k}_{l-t}) \quad (7.1)$$

для любого $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ и любого $t = 2, \ldots, l$. Тогда, применив к левой части полученного равенства утверждение 3) леммы 2.1, а к правой части – предложение 2.2 при $B = C$, получим

$$\eta(x_1\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(x_k\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_{\varepsilon^{t-1}(1)}\, \underbrace{B \ldots B}_{l-t}) \times \ldots$$
$$\ldots$$
$$\times\, \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_{\varepsilon^{t-1}(k)}\, \underbrace{B \ldots B}_{l-t}). \quad (7.2)$$

Это равенство, ввиду тождественности подстановки ε, переписывается следующим образом

$$\eta(x_1\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(x_k\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_1\, \underbrace{B \ldots B}_{l-t}) \times \ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_k\, \underbrace{B \ldots B}_{l-t}). \quad (7.3)$$

Так как $< B, \eta >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, то равенство (7.3) при $t = 2, \ldots, n-1$ принимает вид

$$\eta(x_1\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) \times \ldots \times \eta(x_k\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) =$$
$$= \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_1\, \underbrace{B \ldots B}_{n-t}) \times \ldots \times \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_k\, \underbrace{B \ldots B}_{n-t}). \quad (7.4)$$

Следовательно,

$$\eta(x_j\underbrace{B \ldots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \ldots B}_{t-1}\, x_j\, \underbrace{B \ldots B}_{n-t}) \quad (7.5)$$

для любого $t = 2, \ldots, n$ и любого $j = 1, \ldots, k$, что означает инвариантность $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$.

Достаточность. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k. Из инвариантности $< B, \eta >$ в $< A, \eta >$ следует (7.5) для любого $t = 2, \ldots, n$ и любого $j = 1, \ldots, k$, откуда получаем (7.4). Так как $< B, \eta >$ – инвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, \eta >$, то равенство (7.4) может быть переписано в виде (7.3). Далее последовательно получаем (7.2) и (7.1). Следовательно, l-арная подгруппа $< B^k, \eta_{s,\varepsilon,k} >$ инвариантна в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\varepsilon,k} >$. □

8 Новое доказательство теоремы 4.1

Приведём доказательство первого утверждения теоремы 4.1, отличное от приведённого в [2].

***Теорема* 8.1.** *Пусть подстановка* σ *из* $\mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$ *и для некоторого*

$t = 2, \ldots, l-1$ *подстановка* σ^{t-1} *не является тождественной*, $< B, \eta >$ – *n-арная подгруппа n-арной группы* $< A, \eta >$, *отличная от неё. Тогда существует элемент* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in A^k$ *такой, что*

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-1}) \neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k\ldots B^k}_{t-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-t}). \quad (8.1)$$

Доказательство. Зафиксируем элементы $b \in B$, $u \in A$, $u \notin B$. Пусть для определённости $\sigma^{t-1}(j) = m$, где $j < m$. Положим

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots$$
$$\ldots, x_{m-1}, x_m = u, x_{m+1}, \ldots, x_k),$$

где
$$x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_j = x_{j+1} = \ldots$$
$$= x_{m-1} = x_{m+1} = \ldots = x_k = b.$$

Тогда, используя второе равенство из предложения 2.1, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-1}) =$$
$$= \underbrace{\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})\times\ldots\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})}_{j-1}\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})\times$$
$$\times\underbrace{\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})\times\ldots\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})}_{m-j-1}\times\eta(u\underbrace{B\ldots B}_{l-1})\times$$
$$\times\underbrace{\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})\times\ldots\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{l-1})}_{k-m} =$$
$$= \underbrace{\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{j-1}\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times$$
$$\times\underbrace{\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{m-j-1}\times\eta(u\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times$$
$$\times\underbrace{\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\ldots\times\eta(b\underbrace{B\ldots B}_{n-1})}_{k-m} =$$
$$= \underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times B\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times\eta(u\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m},$$

то есть

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-1}) = \underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times B\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times$$
$$\times\eta(u\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m}. \quad (8.2)$$

Аналогично, используя первое равенство из предложения 2.1 и учитывая, что $x_{\sigma^{t-1}(r)} = b$ для любого $r \in \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, m-1, m, m+1, \ldots, k\}$, получим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k\ldots B^k}_{t-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-t}) =$$
$$= \underbrace{\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}b\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times\ldots\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}b\underbrace{B\ldots B}_{l-t})}_{j-1}\times$$
$$\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}x_{\sigma^{t-1}(j)}\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times$$
$$\times\underbrace{\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}b\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times\ldots\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}b\underbrace{B\ldots B}_{l-t})}_{m-j-1}\times$$
$$\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}x_{\sigma^{t-1}(m)}\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times$$
$$\times\underbrace{\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}b\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times\ldots\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}b\underbrace{B\ldots B}_{l-t})}_{k-m} =$$
$$= \underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}x_m\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times$$
$$\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}x_j\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m} =$$
$$= \underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}u\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times$$
$$\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times B\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m},$$

то есть
$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k\ldots B^k}_{t-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-t}) =$$
$$= \underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}u\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times$$
$$\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times B\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m}. \quad (8.3)$$

Если предположить

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-1}) = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{B^k\ldots B^k}_{t-1}\mathbf{x}\underbrace{B^k\ldots B^k}_{l-t}),$$

то из (8.2) и (8.3) следует

$$\underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times B\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times$$
$$\times\eta(u\underbrace{B\ldots B}_{n-1})\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m} =$$
$$= \underbrace{B\times\ldots\times B}_{j-1}\times\eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}u\underbrace{B\ldots B}_{l-t})\times$$
$$\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{m-j-1}\times B\times\underbrace{B\times\ldots\times B}_{k-m}.$$

Сравнивая множители, стоящие в левой и правой частях полученного равенства на j-ом и m-ом местах, получим

$$B = \eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}u\underbrace{B\ldots B}_{l-t}), \quad B = \eta(u\underbrace{B\ldots B}_{n-1}),$$

что невозможно, так как

$$B \cap \eta(\underbrace{B\ldots B}_{t-1}u\underbrace{B\ldots B}_{l-t}) = \varnothing, \ B \cap \eta(u\underbrace{B\ldots B}_{n-1}) = \varnothing.$$

Следовательно, сделанное предположение неверно, а верно неравенство (8.1) для выбранного $\mathbf{x}$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 2 (60). – С. 54–58.

2. *Гальмак, А.М.* Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (61). – С. 45–47.

3. *Гальмак, А.М.* Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 70–75.

Поступила в редакцию 06.01.2025.

Информация об авторах
Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор