УДК 517.5
DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67
EDN: NEPSMJ

ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СТРУКТУРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Г.Н. Казимиров, В.В. Бураковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EQUIVALENT STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF A FUNCTION FROM A LEBESGUE SPACE

G.N. Kazimirov, V.V. Burakovskiy

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Доказывается эквивалентность итерированного модуля гладкости и K-функционала Петре.

Ключевые слова: *итерированный модуль гладкости*, *K-функционал.*

Для цитирования: *Казимиров*, *Г.Н.* Эквивалентная структурная характеристика функции из пространства Лебега / Г.Н. Казимиров, В.В. Бураковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 67–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67. – EDN: NEPSMJ

Abstract. The equivalence of the iterated modulus of smoothness and the Petre K-functional is proved.

Keywords: *iterated modulus of smoothness*, *K-functional.*

For citation: *Kazimirov*, *G.N.* Equivalent structural characteristic of a function from a Lebesgue space / G.N. Kazimirov, V.V. Burakovskiy // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 67–69. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_67 (in Russian). – EDN: NEPSMJ

Введение

Ранее в [1]–[3] были получены теоремы о связи итерированных обобщённых модулей гладкости с K-функционалом Петре. В настоящей работе рассматривается обычный итерированный модуль гладкости и его связь с K-функционалом Петре.

1 Основные определения

Будем говорить, что 2π-периодическая функция $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$, если для $1 \le p < \infty$ она измерима на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty,$$

а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$ и $\|f\|_\infty = \max\limits_{0 \le x \le 2\pi} |f(x)|$.

Введём обозначения $(r = 2, 3, \ldots)$:

$$\Delta_h^1(f, x) = f(x+h) - f(x),$$

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f, x) = \Delta_{h_r}^1(\Delta_{h_1,\ldots,h_{r-1}}^{r-1}(f, x), x),$$

$$\Delta_h^r(f, x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{r-1}(f, x), x),$$

$$\tilde{\omega}_r(f, \delta)_p = \sup_{|h_i| \le \delta, i=1,\ldots,r} \left\| \Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f, x) \right\|_p.$$

Через $W_p^{(r)}$ обозначим классы (пространства Соболева) таких функций g, что $g \in L_p$ для $1 \le p \le \infty$, а для $p = \infty$ существует величина

$$\sup vrai |f| = \inf\{M : |f(x)| \le M п.в.\}$$

и

$$W_p^{(1)} = \left\{ f : f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \right.$$

$$\left. \varphi - 2\pi - \text{периодическая и } \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \varphi \in L_p \right\},$$

$$\ldots$$

$$W_p^{(r)} = \left\{ f : f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt, \right.$$

$$\left. \varphi - 2\pi - \text{периодическая и } \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = 0, \varphi \in W_p^{(r-1)} \right\}.$$

Для $f \in L_p$ введём K-функционал Петре по формуле:

$$K_r(f, \delta)_p = \inf_{g \in W_p^{(r)}} \left\{ \|f - g\|_p + \delta^r \left\| g^{(r)}(x) \right\|_p \right\}.$$

2 Вспомогательные утверждения

Положим $H^1(f, x) = \int\limits_0^x f(z) dz$,

$$L_h^1(f,x)=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+u)du,$$

а для $k=2,3,\ldots$

$$L_{h_1,\ldots,h_k}^k(f,x)=L_{h_k}(L_{h_1,\ldots,h_{k-1}}^{k-1}(f,x),x),$$

$$H^k(f,x)=H^1(H^{k-1}(f,x),x).$$

***Лемма* 2.1.** *Если* $f\in L_1$, *то для любых* $k\in\mathrm{N}$ *справедливо равенство*:

$$L_h^k(f,x)=\frac{1}{h^k}\Delta_h^k(H^k(f,x),x).$$

Доказательство: воспользуемся индукцией по k.

1. Пусть $k=1$. Тогда $f(x)=(H^1(f,x))'$,

$$f(x+u)=(H^1(f,x+u))',$$

$$L_h^1(f,x)=\frac{1}{h}\int_0^h f(x+u)du=\frac{1}{h}\int_0^h (H(f,x+u))'du=$$

$$=\frac{1}{h}(H(f,x+h)-H(f,x))=\frac{1}{h}\Delta_h^1(H(f,x),x).$$

2. Предположим Лемма 2.1 справедлива для $k-1$, т. е.

$$L_h^{k-1}(f,x)=\frac{1}{h^{k-1}}\Delta_h^{k-1}(H^{k-1}(f,x),x).$$

Тогда

$$(H^k(f,x))'=H^{k-1}(f,x),$$

$$L_h^k(f,x)=\frac{1}{h}\int_0^h L_h^{k-1}(f,x+u)du=$$

$$=\frac{1}{h^k}\int_0^h \Delta_h^{k-1}(H^{k-1}(f,x),x+u)du=$$

$$=\frac{1}{h^k}\int_0^h \Delta_h^{k-1}((H^k(f,x))',x+u)du=$$

$$=\frac{1}{h^k}\int_0^h (\Delta_h^{k-1}(H^k(f,x),x+u))'du=$$

$$=\frac{1}{h^k}\Delta_h^k(H^k(f,x),x).\qquad\square$$

3 Основной результат

***Теорема* 3.1.** *Пусть даны числа* p,r *такие, что* $1\le p\le\infty$, $r=1,2,3,\ldots$ *Тогда для* $f\in L_p$ *справедливы неравенства*:

$$C_1\tilde{\omega}_r(f,\delta)_p\le K_r(f,\delta)_p\le C_2\tilde{\omega}(f,\delta)_p,$$

где положительные постоянные C_1 *и* C_2 *не зависят от* f *и* δ.

Доказательство. Для любой функции $g\in L_p$ $\tilde{\omega}_r(f,\delta)_p\le\tilde{\omega}_r(f-g,\delta)_p+\tilde{\omega}(g,\delta)_p$.

Очевидно, что $\tilde{\omega}_r(f-g,\delta)_p\le C_3\|f-g\|_p$.

Далее

$$\Delta_{t_1}^1(g,x)=g(x+t_1)-g(x)=\int_0^{t_1} g'(x+u)du,$$

$$\left\|\Delta_{t_1}^1(g,x)\right\|_p\le\left|\int_0^{t_1}\|g'(x+u)\|_p du\right|=|t_1|\,\|g'(x)\|_p.$$

По индукции получаем, что

$$\left\|\Delta_{t_1,\ldots,t_r}^r,(g,x)\right\|_p\le|t_1|\cdot|t_2|\cdot\ldots\cdot|t_r|\left\|g^{(r)}(x)\right\|_p.$$

Следовательно, $\tilde{\omega}_r(g,\delta)_p\le\delta^r\left\|g^{(r)}(x)\right\|_p$.

Переходя к точной нижней грани по всем функциям $g\in W_p^{(r)}$, получим:

$$C_1\tilde{\omega}_r(f,\delta)_p\le K_r(f,\delta)_p.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$A_h^r(f,x)=f(x)-(E-L_h^r)^r(f,x),$$

где

$$E(f,x)=f(x).$$

Очевидно, $L_h^r(f,x)\in W_p^{(r)}$. Нетрудно проверить, что $W_p^{(l)}\subset W_p^{(r)}$ при $l\ge r\ge1$, $l=r,r+1,\ldots$ Поэтому $A_h^r(f,x)\in W_p^{(r)}$. Так как $L_h^r(f,x,\nu,\mu)$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом $[a,b]\subset(-1,1)$, то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и обобщённое неравенство Минковского, имеем для $l=2,3\ldots$

$$\left\|((L_h^r)^l(f,x))^{(l)}\right\|_p\le C_4\left\|(L_h^r(f,x))^{(l)}\right\|_p.$$

Так как $A_h^r(f,x)$ представляет собой сумму произведений $L_h^r(f,x)$, то

$$\left\|(A_h^r(f,x))^{(r)}\right\|_p\le C_5\left\|(L_h^r(f,x))^{(r)}\right\|_p.$$

Применяя лемму 2.1, имеем

$$h^r\left\|(A_h^r(f,x))^{(r)}\right\|_p\le C_6\left\|(\Delta_h^r(H^r(f,x),x))^{(r)}\right\|_p=$$

$$=C_3\left\|(\Delta_h^r((H^r(f,x))^{(r)},x))\right\|_p\le$$

$$\le C_3\sup_{|t|\le h}\left\|\Delta_t^r(f,x)\right\|_p\le C_3\tilde{\omega}_r(f,h)_p,$$

где положительные постоянные C_2 и C_3 не зависят от h.

С другой стороны, так как

$$E-L_h^r=(E-L_h)(E+L_h+\ldots+L_h^{r-1}),$$

то из определения $L_h(f,x)$ и обобщённого неравенства Минковского следует, что

$$\|L_h(f,x)\|_p\le C_4\|f\|_p.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left\|(E-L_h^r)(g,x)\right\|_p&\le C_5\left\|(E-L_h)(g,x)\right\|_p\le\\&\le C_6\sup_{0\le u\le h}\left\|\Delta_u(g,x)\right\|_p.\end{aligned}\qquad(3.1)$$

Из неравенства (3.1) следует, что

$$\left\|f(x)-A_h^r(f,x)\right\|_p\le$$

$$\le C_7\sup_{0\le u_1\le h}\sup_{0\le u_2\le h}\ldots\sup_{0\le u_r\le h}\left\|\Delta_{u_1,u_2,\ldots,u_r}^r(f,x,)\right\|_p\le$$

$$\le C_8\tilde{\omega}_r(f,h)_p.$$

Таким образом,

$$K_r(f,\delta)_p\le C_9\tilde{\omega}(f,\delta)_p.\qquad\square$$

Заключение

В статье рассмотрена эквивалентная структурная характеристика функций $f \in L_p$. Ранее этот результат был получен для обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Чебышева [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимиров*, *Г.Н.* Эквивалент структурной характеристики сложного процесса, модулируемого алгебраическими многочленами / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 76–79.

2. *Казимиров*, Г.Н. О теоремах Джексона для *k*-го обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, 3054-В94. – С. 1–40.

3. *Казимиров*, *Г.Н.* Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 28.12.2024.

Информация об авторах

Казимиров Григорий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент

Бураковский Владимир Викторович – к.ф.-м.н., доцент