МАТЕМАТИКА

УДК 519.872 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_70
EDN: NWEPAT

G-СЕТЬ С НЕНАДЁЖНЫМИ СИСТЕМАМИ, КОНТРОЛЬНЫМИ И КАРАНТИННЫМИ ОЧЕРЕДЯМИ И ВОЗМОЖНОСТЬЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК МЕЖДУ СИСТЕМАМИ

Д.Я. Копать

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы

G-NETWORK WITH UNRELIABLE SYSTEMS WITH CONTROL AND QUARANTINE QUEUES AND THE OPTION OF MOVING NEGATIVE ORDERS BETWEEN SYSTEMS

D.Y. Kopats

Yanka Kupala State University of Grodno

Аннотация. Объектом исследования в статье является G-сеть, состоящая из ненадёжных карантинных, контрольных и обслуживающих очередей в системах (СеМО). Отрицательные заявки после уничтожения одной положительной могут как покидать сеть, так и перемещаться между системой массового обслуживания (СМО) сети. Предполагается, что в определённой доле случаев вирус может обмануть антивирусное программное обеспечение (АПО) и причинить компьютерной сети вред. Такое возможно до тех пор, пока вирус не будет обнаружен АПО определённой СМО. С помощью метода многомерных производящих функций (ММПФ) находятся средние характеристики данной СеМО, если все её характеристики, кроме числа линий обслуживания (ЛО), функционируют в режиме насыщения.

Ключевые слова: *G-сеть*, *ненадёжные линии обслуживания*, *системы с карантинными и контрольными очередями*, *метод многомерных производящих функций*, *нестационарные вероятности состояний*, *средние характеристики.*

Для цитирования: *Копать*, *Д.Я.* G-сеть с ненадёжными системами, контрольными и карантинными очередями и возможностью перемещения отрицательных заявок между системами / Д.Я. Копать // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 70–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_70. – EDN: NWEPAT

Abstract. The object of the investigation in the article is a G-network consisting of unreliable quarantine, control and service queues in the systems (QS). After the destruction of one positive claim, negative claims can either leave the network or move between the QS of the network. It is assumed that in a certain proportion of cases, a virus can deceive antivirus software (ASW) and cause harm to a computer network. This is possible until the virus is detected by the ASW of a certain QS. Using the method of multidimensional generating functions (MDGF), the average characteristics of a given QS are found if all of its characteristics, except for the number of SLs, operate in saturation mode.

Keywords: *G-network*, *unreliable service lines*, *systems with control and quarantine queues*, *method of multidimensional generating functions*, *non-stationary state probability*, *average characteristics.*

For citation: *Kopats*, *D.Y.* G-network with unreliable systems with control and quarantine queues and the option of moving negative orders between systems / D.Y. Kopats // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 70–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_70 (in Russian). – EDN: NWEPAT

Введение

G-сети как разновидность сетей массового обслуживания (СеМО), в которых помимо заявок, требующих обслуживания, функционируют объекты, которые не требуют обслуживания, но приносят вред СеМО в стационарном режиме были введены в рассмотрение в статье [1], а в переходном режиме впервые исследовались в статье [2]. В статье [3] была исследована G-сеть с ненадёжными линиями обслуживания в переходном режиме в случае, когда линия обслуживания (ЛО) приходила в неисправность из-за причин, не связанных с компьютерными вирусами. Модели информационных систем и сетей (ИСС) с установленным антивирусным программным обеспечением (АПО), основанные на использовании СеМО, как известно автору статьи, впервые были исследованы в статье [4]. В статье [4] предполагается наличие в каждой системе массового обслуживания (СМО) контрольной очереди (КонО), которая проверяет заявку на стандартность и, в случае успешного прохождения данной проверки, заявка попадает в очередь на обслуживание. В случае, если заявка не проходит проверку на стандартность, она попадает в карантинную очередь (КарО), которая является отдельной СМО, и проходит лечение. В случае его успешности она возвращается в ту же СМО на обслуживание, иначе покидает СеМО. КонО является математической моделью функционирования АПО, которое проверяет заявку на наличие вируса. В работе [4] не предполагалось наличие в любой момент времени прихода отрицательных заявок в СМО сети. Такая модель означает наличие только одного карантина во всей ИСС. Но в большинстве современных ПК установлено АПО, то есть в каждой СМО должен быть карантин. В статье [5] предполагалось, что в каждой СМО СеМО, помимо КонО и обслуживающей очереди, присутствует ещё и КарО, которая в случае признания заявки отрицательной лечит её, но в случае, если отрицательной заявке удаётся обмануть АПО, она уничтожает одну положительную заявку и уходит из СеМО. В работе [6] предлагалось, что отрицательная заявка способна после уничтожения одной положительной заявки перемещаться между СМО сети, пока не будет найдена в КонО.

Данная статья посвящена нахождению вероятностно-временных характеристик для марковской G-сети с ненадёжными системами с Кон и КарО с помощью ММПФ. Данная модель обобщает модель в статье [6] на случай ненадёжности функционирующих в СМО ЛО. Данная модель соответствует ИТСС, ПК которой на некоторое время могут потерять отклик некоторого числа ПО или из-за значительного перегрева процессора ПК на определённое время. В отличие от моделей исследования G-сети, например, в статье [3] условие для ЛО смягчено: здесь функция Хевисайда для исправных ЛО аппроксимируется не единицей, а своим средним значением. Для количества заявок в СМО сети накладываются условия функционирования сети в режиме насыщения.

1 Описание сети

Рассмотрим G-сеть [1], состоящую из n СМО. В СМО $S_i, i=\overline{1,n}$ поступают простейшие потоки положительных и отрицательных заявок с интенсивностями соответственно $\lambda_{0i}^{+}, \lambda_{0i}^{-}, i=\overline{1,n}$. Первоначально поступившая в i-ю СМО заявка становится в КонО, где проверяется на стандартность, т. е. на наличие вируса в течении времени, имеющего показательную функцию распределения (ПФР) с параметром $\mu_i^{(v)}, i=\overline{1,n}$. После проверки на стандартность в i-ой СМО положительная заявка признается таковой с вероятностью p_i^{+} и поступит в очередь на обслуживание в этой СМО, а с вероятностью $1-p_i^{+}$ будет признана отрицательной и отправится в КарО на лечение. С вероятностью p_i^{-} отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО признается таковой и переходит в КарО на лечение, а с вероятностью $1-p_i^{-}$ может ошибочно быть признана положительной и поступит в очередь на обработку, где она уничтожает одну положительную заявку в непустой системе, после чего с вероятностью n_{i0} покидает сеть или с вероятностью n_{ij} переходит в КонО j-ой СМО, $\sum_{j=0}^{n} n_{ij}=1, i=\overline{1,n}$. В пустой очереди на обслуживание отрицательная заявка не имеет влияния на систему. Пусть длительности обслуживания положительных заявок в СМО S_i имеют ПФР с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$, по завершении которого с вероятностью p_{ij}^{+} переходит в КонО СМО S_j как положительная заявка, с вероятностью p_{ij}^{-} – как отрицательная и с вероятностью $p_{i0}=1-\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}^{+}+p_{ij}^{-}\right)$ покидает сеть, $i,j=\overline{1,n}$.

ЛО в КонО, КарО и обслуживающих очередях могут подвергаться случайным поломкам. Тогда приходят в неисправность все ЛО системы, а заявки, находившиеся на обслуживании, становятся первыми в очередь. Поэтому время исправной работы СМО S_i обозначим через $\beta_i, i=\overline{1,n}$, а время восстановления СМО S_i $\gamma_i, i=\overline{1,n}$. В карантине заявки, признанные отрицательными, становятся в КарО. Предположим, что длительность лечения заявки в i-ом узле имеет ПФР с параметром $\mu_i^{(c)}, i=\overline{1,n}$. Если лечение успешное, то заявка с вероятностью $p_i^{(s)}, i=\overline{1,n}$, , переходит в очередь на обработку в i-ой СМО, иначе с вероятностью $1-p_i^{(s)}$ отрицательная заявка удаляется, т. е. покидает сеть. Пусть вирус не может обмануть при его лечении. Состояние сети описывается вектором:

$$\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)=\left(d_1,..,d_n,\vec{k}_1,...,\vec{k}_n,\vec{l}_1,...,\vec{l}_n;t\right), \quad (1.1)$$

где

$$\left(\vec{d}_i,\vec{k}_i,\vec{l}_i,t\right)=\left(d_i;k_i^{(p)};k_i^{(s)};l_i^{(n)};l_i^{(c)};t\right),$$

$k_i^{(p)}; l_i^{(n)}$ – соответственно число положительных и отрицательных заявок, находящихся в КонО i-ой СМО; $k_i^{(s)}$ – число положительных заявок на обслуживании в i-ой СМО; $l_i^{(c)}$ – число заявок на КарО в i-ой СМО, d_i – равно 1, если все ЛО в i-ой СМО исправны и 0 в противном случае. Дисциплина обслуживания в КонО RS. Тогда вероятность проверки на стандартность положительной заявки в режиме насыщения равна

$$q_i^{+}=\left(\lambda_{0i}^{+}+\sum_{j=1}^{n}\mu_j p_{ji}^{+}\right)\left(\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}+\sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(p_{ji}^{+}+p_{ji}^{-}\right)\right)^{-1}.$$

В [7] данный коэффициент представлен в стационарном режиме. Пусть $\tilde{I}_\alpha$, I_α – вектора размерностей $2n$ *и* n соответственно, состоящие из 0, кроме компоненты с номером α, равной единице.

2 Система РДУ Колмогорова для нестационарных вероятностей состояний сети

Возможны следующие переходы нашего марковского процесса в состояние $(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t+\Delta t)$ за время Δt:

1) из состояния $(\vec{d},\vec{k}-\tilde{I}_{2i-1},\vec{l},t)$ с вероятностью $\lambda_{0i}^{+}u(k_i^{(p)})\Delta t+o(\Delta t)$, в КонО i-ой СМО извне за время Δt поступит положительная заявка $i=\overline{1,n}$;

2) из состояния $(\vec{d},\vec{k},\vec{l}-\tilde{I}_{2i-1},t)$ в КонО i-ой СМО за время Δt извне поступит отрицательная заявка с вероятностью $\lambda_{0i}^{-}u(l_i^{(n)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$;

3) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i},\vec{l},t)$, положительная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана таковой и перейдет в очередь для обслуживания с вероятностью $\mu_i^{(v)}u(d_i)q_i^{+}p_i^{+}u(k_i^{(s)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$;

4) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1},\vec{l}-\tilde{I}_{2i},t)$ с вероятностью $\mu_i^{(v)}u(d_i)q_i^{+}(1-p_i^{+})\times u(l_i^{(c)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ положительная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана отрицательной и перейдет в КарО;

5) из состояния $(\vec{d},\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i},t)$, с вероятностью $\mu_i^{(v)}(1-q_i^{+})u(d_i)\times p_i^{-}u(l_i^{(c)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана отрицательной и перейдет в КарО;

6) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1},t)$, с вероятностью $\mu_i^{(v)}n_{i0}(1-q_i^{+})\times(1-p_i^{-})u(d_i)u(k_i^{(s)})\Delta t+$ $+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, уйдя из сети;

7) из состояния $(\vec{d},\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1},t)$, $i=\overline{1,n}$ $\mu_i^{(v)}u(d_i)(1-q_i^{+})(1-p_i^{-})n_{i0}\times(1-u(k_i^{(s)}))\Delta t+o(\Delta t)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в пустую очередь на обслуживание и уйдет из сети;

8) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1},t)$, с вероятностью $\mu_i^{(v)}(1-q_i^{+})(1-p_i^{-})u(k_i^{(s)})n_{ij}u(l_j^{(n)})\times$ $\times u(d_i)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание и удалит 1 положительную заявку, перейдя в КонО j-ой СМО;

9) из состояния $(\vec{d},\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1},t)$, $i=\overline{1,n}$ $\mu_i^{(v)}(1-q_i^{+})(1-p_i^{-})(1-u(k_i^{(s)}))n_{ij}u(d_i)\times$ $\times u(l_j^{(n)})\Delta t+o(\Delta t)$ отрицательная заявка после проверки на стандартность в i-ой СМО будет признана положительной, перейдет в очередь на обслуживание, но застанет систему пустой и перейдет в КонО j-ой СМО;

10) из состояния $(\vec{d}-I_i,\vec{k},\vec{l},t)$, с вероятностью $\gamma_i(1-u(d_i))\Delta t+o(\Delta t), i=\overline{1,n}$ СМО S_i восстановится и начнёт обслуживать заявку;

11) из состояния $(\vec{d}+I_i,\vec{k},\vec{l},t)$, с вероятностью $\beta_i u(d_i)\Delta t+o(\Delta t), i=\overline{1,n}$ СМО S_i выйдет из строя;

12) из состояния $(\vec{d},\vec{k}-\tilde{I}_{2i},\vec{l}+I_{2i},t)$, с вероятностью $\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}u(d_i)u(k_i^{(s)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ КарО i-ой СМО удастся вылечить отрицательную заявку и она отправляется в очередь на обслуживание в i-ую СМО;

13) из состояния $(\vec{d},\vec{k},\vec{l}+\tilde{I}_{2i},t)$, с вероятностью $\mu_i^{(c)}(1-p_i^{(s)})u(d_i)\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ КарО невылеченная отрицательная заявка покидает сеть;

14) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i}-\tilde{I}_{2j-1},\vec{l},t)$, с вероятностью $\mu_i p_{ij}^{+}u(d_i)u(k_j^{(p)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n}$ время обслуживания заявки в i-ой СМО закончилось и она направится в КонО j-ой СМО снова как положительная заявка;

15) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l}-\tilde{I}_{2j-1},t)$, с вероятностью $\mu_i u(d_i)p_{ij}^{-}u(l_j^{(n)})\Delta t+o(\Delta t)$, $i,j=\overline{1,n}$ время обслуживания заявки в i-ой СМО закончилось и она направляется в КонО j-ой СМО как отрицательная заявка;

16) из состояния $(\vec{d},\vec{k}+\tilde{I}_{2i},\vec{l},t)$, с вероятностью $\mu_i u(d_i)p_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$, $i=\overline{1,n}$ после обслуживания заявки в i-ой СМО она уходит из сети;

17) из состояния $(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t)$, с вероятностью

$$1-\sum_{i=1}^{n}\Big[\lambda_{0i}^{+}u(k_i^{(p)})+\lambda_{0i}^{-}u(l_i^{(n)})+$$
$$+\mu_i^{(v)}(1-q_i^{+})(1-p_i^{-})u(d_i)n_{i0}+\gamma_i(1-u(d_i))+$$
$$+u(d_i)\Big[\beta_i+\mu_i^{(v)}(1-q_i^{+})(1-p_i^{-})\sum_{j=1}^{n}n_{ij}u(l_j^{(n)})+$$

$$+\mu_i^{(v)} q_i^+ p_i^+ u\left(k_i^{(s)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\left(q_i^+\left(1-p_i^+\right)+\left(1-q_i^+\right)p_i^-\right)u\left(l_i^{(c)}\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}\left(p_i^{(s)}u\left(k_i^{(s)}\right)+\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)+$$
$$+\mu_i\left(1-\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^+\left(1-u\left(k_j^{(p)}\right)\right)+p_{ij}^-\left(1-u\left(l_j^{(n)}\right)\right)\right)\Bigg]\Delta t+$$
$$+o\left(\Delta t\right).$$

Аппроксимируем функцию $u(d_i)$ её математическим ожиданием, которое по определению функции Хевисайда равна $P(d_i(t)\geq 1)$. Представив исправность ЛО процессом гибели и размножения с множеством состояний $\{0;\ 1\}$, положив, что в начальный момент времени все системы исправны, используя работу [9], получим:

$$u(d_i)=1-\beta_i(\beta_i+\gamma_i)^{-1}(1-e^{-(\beta_i+\gamma_i)t})=$$
$$=(\beta_i+\gamma_i)^{-1}(\gamma_i+\beta_i e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}).$$

С помощью формулы полной вероятности в которой, перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, можно показать, что нестационарные вероятности состояний в режиме насыщения, т. е. $\forall t\ k_i^{(p)}>0$, $k_i^{(s)}>0,\ l_i^{(n)}>0, l_i^{(c)}>0, d_i>0$. Тогда

$$u(k_i^{(p)})=u(k_i^{(s)})=\mathrm{u}(l_i^{(n)})=\mathrm{u}(l_i^{(c)})=1,\ i=\overline{1,n}$$

удовлетворяют системе РДУ:

$$\frac{dP\left(\vec{d};\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}=$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}+\gamma_i\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}\left(1-e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)+$$
$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\left[\beta_i+\mu_i+\mu_i^{(v)}+\mu_i^{(c)}\right]\Bigg\}\times$$
$$\times P\left(\vec{d};\vec{k},\vec{l},t\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Bigg[\lambda_{0i}^{+}P\left(\vec{d};\vec{k}-\tilde{I}_{2i-1};\ \vec{l};t\right)+$$
$$+\lambda_{0i}^{-}P\left(\vec{d};\vec{k};\vec{l}-\tilde{I}_{2i-1};t\right)+$$
$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$
$$\times\Big[\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i};\vec{l};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}P\left(\vec{d};\vec{k}-\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i};t\right)+$$
$$+\mu_i^{(v)}\Big(q_i^+\left(1-p_i^+\right)P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i-1};\ \vec{l}-\tilde{I}_{2i};t\right)+$$
$$+\left(1-q_i^+\right)p_i^-P\left(\vec{d};\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2i};t\right)\Big)+$$
$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1};t\right)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{ij}\times\right.$$
$$\left.\times P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}+\tilde{I}_{2i-1}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\right)\Big\}+$$
$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)P\left(\vec{d};\vec{k};\vec{l}+\tilde{I}_{2i};t\right)+$$
$$+\mu_i p_{i0}P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l};t\right)\Big]+$$
$$+\frac{\gamma_i\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}\left(1-e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)P\left(\vec{d}-I_i;\vec{k},\vec{l},t\right)+$$
$$+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}\left(\gamma_i+\beta_i e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)P\left(\vec{d}+I_i;\vec{k},\vec{l},t\right)+$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$
$$\times\Big[\mu_i p_{ij}^+u\left(k_j^{(p)}\right)P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i}-\tilde{I}_{2j-1};\vec{l};t\right)+$$
$$+\mu_i p_{ij}^-P\left(\vec{d};\vec{k}+\tilde{I}_{2i};\vec{l}-\tilde{I}_{2j-1};t\right)\Big].\qquad(2.1)$$

3 Метод многомерных производящих функций

Для решения системы РДУ (2.1) используем методику, изложенную в [2]. Обозначим через $\Psi_{5n}(z,t)$, где $z=(z_1,z_2,...,z_{5n})$, производящую функцию размерности $5n$:

$$\Psi_{5n}(z,t)=\sum_{\substack{d_i=0\\ i=\overline{1,n}}}^{1}\ \sum_{\substack{k_i^{(p)},k_i^{(s)}=0\\ i=\overline{1,n}}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_i^{(c)}=0\\ i=\overline{1,n}}}^{\infty}\ \sum_{\substack{l_i^{(n)}=0\\ i=\overline{1,n}}}^{\infty}P\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l},t\right)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}.\qquad(3.1)$$

Суммирование берется по каждому $k_i^{(p)},k_i^{(s)},l_i^{(n)},l_i^{(c)}$, от 0 до ∞, а значения d_i от 0 до 1 $i=\overline{1,n}$. Пусть X – множество всевозможных состояний нашей СеМО. Обозначим через

$$\sum_{\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\in X}^{\infty}\bullet=$$
$$=\sum_{d_1=0}^{1}\cdots\sum_{d_n=0}^{1}\sum_{k_1^{(p)}=0}^{\infty}\sum_{k_1^{(s)}=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_n^{(p)}=0}^{\infty}\sum_{k_n^{(s)}=0}^{\infty}\sum_{l_1^{(n)}=0}^{\infty}\sum_{l_1^{(c)}=0}^{\infty}\cdots\sum_{l_n^{(n)}=0}^{\infty}\sum_{l_n^{(c)}=0}^{\infty}\bullet.$$

Из (3.1) следует, что

$$\frac{d\Psi_{5n}(z,t)}{dt}=$$
$$=\sum_{\left(\vec{d},\vec{k},\vec{l}\right)\in X}^{\infty}\frac{dP\left(\vec{k},\vec{l},t\right)}{dt}\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}.\qquad(3.2)$$

Умножив каждое из уравнений (2.2) на $\prod(\vec{z})=\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}$ и просуммировав по всем возможным значениям $k_i^{(p)},k_i^{(s)}$, $l_i^{(n)},l_i^{(c)}$ от 1 до $+\infty$, а значения d_i от 0 до 1 $i=\overline{1,n}$ получим

$$\frac{d\Psi_{5n}(z,t)}{dt}=-\sum_{i=1}^{n}\Big\{\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}+\gamma_i\left(1-u\left(d_i\right)\right)+$$

$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\left[\beta_i+\mu_i+\mu_i^{(v)}+\mu_i^{(c)}\right]\Bigg\}\Psi_{5n}(z,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_{0i}^{+}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k-\tilde I_{2i-1};\vec l;t\right)\prod(\vec z)+\right.$$

$$+\lambda_{0i}^{-}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k;\vec l-\tilde I_{2i-1};t\right)\prod(\vec z)+$$

$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\prod(\vec z)\left[\mu_i^{(v)}q_i^{+}p_i^{+}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l,t)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i-1}-\tilde I_{2i};\vec l;t\right)+\right.$$

$$+\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k-\tilde I_{2i};\vec l+\tilde I_{2i};t\right)\prod(\vec z)+$$

$$+\mu_i^{(v)}q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)\times$$

$$\times\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i-1};\vec l-\tilde I_{2i};t\right)\prod(\vec z)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\times$$

$$\times\left(p_i^{-}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k;\vec l+\tilde I_{2i-1}-\tilde I_{2i};t\right)\prod(\vec z)+\right.$$

$$\left.+\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l+\tilde I_{2i-1};t\right)\prod(\vec z)\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{ij}\times$$

$$\times\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l+\tilde I_{2i-1}-\tilde I_{2j-1};t\right)\prod(\vec z)+$$

$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k;\vec l+\tilde I_{2i};t\right)\prod(\vec z)+$$

$$\left.+\mu_i p_{i0}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l;t\right)\prod(\vec z)\right]+\prod(\vec z)\times$$

$$\times\left\{\frac{\gamma_i\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}\left(1-e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)P\left(\vec d-I_i;\vec k,\vec l,t\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}\left(\gamma_i+\beta_i e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)P\left(\vec d+I_i;\vec k,\vec l,t\right)\right\}+$$

$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\sum_{i,j=1}^{n}\left[\mu_i p_{ij}^{+}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i}-\tilde I_{2j-1};\vec l;t\right)\prod(\vec z)+\right.$$

$$\left.+\mu_i p_{ij}^{-}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l-\tilde I_{2j-1};t\right)\prod(\vec z)\right].$$

Рассмотрим суммы последнего равенства. Аналогично [2], получим:

$$\Sigma_1=\lambda_{0i}^{+}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k-\tilde I_{2i-1};\ \vec l;t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}=\lambda_{0i}^{+}z_{n+2i-1}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_2=\lambda_{0i}^{-}\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k;\vec l-\tilde I_{2i-1};t\right)\prod(\vec z)=$$

$$=\lambda_{0i}^{-}z_{3n+2i-1}\Psi_{5n}(z,t).$$

Рассмотрим другие суммы:

$$\Sigma_3=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i-1}-\tilde I_{2i};\vec l;t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}}\Psi_{5n}(z,t).$$

Последний переход возможен в силу функционирования СМО сети в режиме насыщения. Аналогично данной сумме можно получить:

$$\Sigma_4=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k-\tilde I_{2i};\vec l+\tilde I_{2i};t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_5=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i-1};\vec l-\tilde I_{2i};t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_6=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k;\vec l+\tilde I_{2i-1}-\tilde I_{2i};t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_7=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k;\vec l+\tilde I_{2i};t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{1}{z_{3n+2i}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_8=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l;t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{1}{z_{n+2i}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_9=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i}-\tilde I_{2j-1};\vec l;t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_{10}=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l-\tilde I_{2j-1};t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_{11}=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d;\vec k+\tilde I_{2i};\vec l+\tilde I_{2i-1};t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{2i}^{k_i^{(s)}}z_{2n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{2n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{1}{z_{3n+2i-1}z_{n+2i}}\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_{12}=\sum_{(\vec d,\vec k,\vec l)\in X}^{\infty}P\left(\vec d,\vec k+\tilde I_{2i};\vec l+\tilde I_{2i-1}-\tilde I_{2j-1};t\right)\prod(\vec z)=$$

$$=\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}z_{3n+2i-1}}\Psi_{5n}(z,t).$$

Аналогично [3] получим:

$$\Sigma_{13}=\sum_{d_1=0}^{1}\ldots\sum_{d_n=0}^{1}\sum_{k_1^{(p)}=1}^{\infty}\sum_{k_1^{(s)}=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_i^{(s)}=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n^{(p)}=1}^{\infty}\sum_{k_n^{(s)}=1}^{\infty}\sum_{l_1^{(n)}=1}^{\infty}\sum_{l_1^{(c)}=1}^{\infty}\ldots$$

$$\ldots\sum_{l_i^{(n)}=1}^{\infty}\ldots\sum_{l_n^{(n)}=0}^{\infty}\sum_{l_n^{(c)}=1}^{\infty}P\left(\vec d-I_i;\vec k,\vec l,t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}=z_i\Psi_{5n}(z,t);$$

$$\Sigma_{14}=\sum_{d_1=0}^{1}\ldots\sum_{d_n=0}^{1}\sum_{k_1^{(p)}=1}^{\infty}\sum_{k_1^{(s)}=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_i^{(s)}=1}^{\infty}\ldots\sum_{k_n^{(p)}=1}^{\infty}\sum_{k_n^{(s)}=1}^{\infty}\sum_{l_1^{(n)}=1}^{\infty}\sum_{l_1^{(c)}=1}^{\infty}\ldots$$

$$\ldots\sum_{l_i^{(n)}=1}^{\infty}\ldots\sum_{l_n^{(n)}=0}^{\infty}\sum_{l_n^{(c)}=1}^{\infty}P\left(\vec d+I_i;\vec k,\vec l,t\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{d_i}z_{n+2i-1}^{k_i^{(p)}}z_{n+2i}^{k_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{l_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{l_i^{(c)}}=\frac{1}{z_i}\Psi_{5n}(z,t).$$

С учётом данных сумм, последнее равенство примет вид:

$$\frac{d\Psi_{5n}(z,t)}{dt}=$$

$$=\Psi_{5n}(z,t)\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left\{\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}+\gamma_i\left(1-u\left(d_i\right)\right)\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\left[\beta_i+\mu_i+\mu_i^{(v)}+\mu_i^{(c)}\right]+\lambda_{0i}^{+}z_{n+2i-1}+\lambda_{0i}^{-}z_{3n+2i-1}+$$

$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\left[\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}\frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}}+\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}p_i^{+}\frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}}+\right.\right.$$

$$\left.q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)\frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}}+\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}\frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}}\right)+$$

$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)\frac{1}{z_{3n+2i}}+\mu_i p_{i0}\frac{1}{z_{n+2i}}+$$

$$\left.\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\frac{1}{z_{3n+2i-1}z_{n+2i}}\right)\right]+$$

$$+\left(\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\sum_{i,j=1}^{n}\left[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{ij}\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}z_{3n+2i-1}}+\right.$$

$$\left.\left.+\mu_i\left(p_{ij}^{+}\frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}}+p_{ij}^{-}\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}}\right)\right]\right\}+$$

$$+z_i\gamma_i\left(\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}-\frac{\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)+$$

$$+\frac{z_i\gamma_i\beta_i}{\beta_i+\gamma_i}\left(1-e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)+$$

$$\left.+\frac{\beta_i}{z_i(\beta_i+\gamma_i)}\left(\gamma_i+\beta_i e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\right\}.$$

Решение данного ДУ с учётом начального состояния $\vec\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_1^{(p)},\alpha_1^{(s)}\ldots\ \alpha_n^{(p)},\alpha_n^{(s)},\alpha_1^{(n)},\alpha_1^{(c)},\ldots,\alpha_n^{(n)},\alpha_n^{(c)})$ т. е. $P(\vec\alpha,t)=1$ имеет вид:

$$\Psi_{5n}(z,t)=\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\beta_i\gamma_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}\right)(1-z_i)+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}\right)\left[\beta_i\left(\frac{z_i-1}{z_i}\right)+\mu_i^{(v)}+\mu_i^{(c)}+\mu_i\right]+$$

$$+\left(-\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}\right)\left[\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}\frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}}+\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}p_i^{+}\frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}}+\right.\right.$$

$$\left.+q_i^{+}\left(1-p_i^{+}\right)\frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}}+\left(1-q_i^{+}\right)p_i^{-}\frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}}\right)+$$

$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)\frac{1}{z_{3n+2i}}+\mu_i p_{i0}\frac{1}{z_{n+2i}}+$$

$$\left.+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{i0}\frac{1}{z_{3n+2i-1}z_{n+2i}}\right)\right]-$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^{+}\right)\left(1-p_i^{-}\right)n_{ij}\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}z_{3n+2i-1}}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\mu_i\left(p_{ij}^{+}\frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}}+p_{ij}^{-}\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}}\right)\right]\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left[\gamma_i\left(\frac{\beta_i t}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\gamma_i t}{\beta_i+\gamma_i}-\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\left[\beta_i+\mu_i^{(v)}+\mu_i^{(c)}+\mu_i\right]+$$

$$+\left(\lambda_{0i}^{+}+\lambda_{0i}^{-}+\mu_i+\lambda_{0i}^{+}z_{2i-1}+\lambda_{0i}^{-}z_{2n+2i-1}\right)t+$$

$$+\left(\frac{\gamma_i t}{\beta_i+\gamma_i}-\frac{\beta_i}{(\beta_i+\gamma_i)^2}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\left[\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}\frac{z_{n+2i}}{z_{3n+2i}}+\mu_i^{(v)}\left(q_i^{+}p_i^{+}\frac{z_{n+2i}}{z_{n+2i-1}}+\right.\right.$$

$$+q_i^+\left(1-p_i^+\right)\frac{z_{3n+2i}}{z_{n+2i-1}}+\left(1-q_i^+\right)p_i^-\frac{z_{3n+2i}}{z_{3n+2i-1}}\Bigg)+$$

$$+\left(\mu_i^{(c)}\left(1-p_i^{(s)}\right)\right)\frac{1}{z_{3n+2i}}+\mu_i p_{i0}\frac{1}{z_{n+2i}}+$$

$$+\left(\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{i0}\frac{1}{z_{3n+2i-1}z_{n+2i}}\right)\Bigg]+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\gamma_i t}{\beta_i+\gamma_i}-\frac{\beta_i}{\left(\beta_i+\gamma_i\right)^2}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}\right)\times$$

$$\times\Bigg[\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)n_{ij}\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}z_{3n+2i-1}}+$$

$$+\mu_i\left(p_{ij}^+\frac{z_{n+2j-1}}{z_{n+2i}}+p_{ij}^-\frac{z_{3n+2j-1}}{z_{n+2i}}\right)\Bigg]\Bigg\}\times \qquad (3.4)$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}z_i^{\alpha_i}z_{n+2i-1}^{\alpha_i^{(p)}}z_{n+2i}^{\alpha_i^{(s)}}z_{3n+2i-1}^{\alpha_i^{(n)}}z_{3n+2i}^{\alpha_i^{(c)}}.$$

4 Нахождение среднего числа заявок

С помощью производящей функции (3.4), аналогично работе [9], можно находить выражения для среднего числа положительных и отрицательных заявок в КонО, а также числа заявок на обслуживании и на КарО, дифференцируя (3.4) по той компоненте в точке $z_i=1,\quad i=\overline{1,5n}$, которая в векторе (1.1) за неё отвечает. Введём обозначения

$$D_i\left(t\right)=M\left\{d_i\left(t\right)\right\},\ \ N_i^{(p)}\left(t\right)=M\left\{k_i^{(p)}\left(t\right)\right\},$$

$$L_i^{(c)}\left(t\right)=M\left\{l_i^{(c)}\left(t\right)\right\},$$

$$N_i^{(s)}\left(t\right)=M\left\{k_i^{(s)}\left(t\right)\right\},\ L_i^{(n)}\left(t\right)=M\left\{l_i^{(n)}\left(t\right)\right\}.$$

Выражение для среднего числа исправных ЛО имеет вид:

$$D_i\left(t\right)=\frac{\partial\Psi_{5n}\left(z,t\right)}{\partial z_i}\Bigg|_{z_l=1,l=\overline{1,5n}}=$$

$$=\frac{\gamma_i}{\beta_i+\gamma_i}+\frac{\beta_i}{\left(\beta_i+\gamma_i\right)^2}e^{-(\beta_i+\gamma_i)t}.$$

То есть среднее число положительных заявок в КонО равно:

$$N_i^{(p)}\left(t\right)=\frac{\partial\Psi_{5n}\left(z,t\right)}{\partial z_{n+2i-1}}\Bigg|_{z_l=1,l=\overline{1,5n}}=\Bigg[\lambda_{0i}^+-\mu_i^{(v)}q_i^++$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\gamma_j}{\beta_j+\gamma_j}+\frac{\beta_j}{\beta_j+\gamma_j}e^{-\left(\beta_j+\gamma_j\right)t}\right)\mu_j p_{ji}^+\Bigg]+\alpha_i^{(p)}.$$

Аналогично найдём остальные характеристики

$$L_i^{(n)}\left(t\right)=\Bigg(\lambda_{0i}^--\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left[\mu_j^{(v)}\left(1-q_j^+\right)\left(1-p_j^-\right)n_{ji}+\mu_j p_{ji}^-\right]\Bigg)t+\alpha_i^{(n)},$$

$$N_i^{(s)}\left(t\right)=\Big\{\mu_i^{(c)}p_i^{(s)}+\mu_i^{(v)}q_i^+p_i^+-\mu_i-$$

$$-\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)\left(1-p_i^-\right)\Big\}t+\alpha_i^{(s)},$$

$$L_i^{(c)}\left(t\right)=\Big\{-\mu_i^{(c)}+\mu_i^{(v)}q_i^+\left(1-p_i^+\right)+$$

$$+\mu_i^{(v)}\left(1-q_i^+\right)p_i^-\Big\}t+\alpha_i^{(c)}.$$

Пример. Рассмотрим СеМО, состоящую из $n=3$ СМО. Интенсивности входящих потоков положительных и отрицательных заявок в СМО сети $\lambda_{0i}^+,\lambda_{0i}^-$ равны соответственно $\lambda_{01}^+=4$, $\lambda_{02}^+=8,\lambda_{03}^+=7,\lambda_{0i}^-=1,i=\overline{1,3}.$ Интенсивности выхода из строя β_i и интенсивности восстановления γ_i равны соответственно $\beta_i=i,i=\overline{1,3}$, $\gamma_1=4,\gamma_2=7,\gamma_3=3.$ Интенсивности обслуживания заявок в различных очередях представлены в таблице 4.1. Вероятности правильного определения положительных p_i^+ и отрицательных заявок p_i^- в КонО систем сети равны соответственно $p_i^+=0,9+0,02i,\ p_1^-=0,97,\ p_2^-=0,85,\quad p_3^-=0,9.$ Вероятности вылечить заявку в карантине $p_i^{(s)}$ следующие $p_i^{(s)}=0,8-0,1i,\ i=\overline{1,3}.$ В таблице 4.2 представлены вероятности перехода обслуженных заявок в КонО других СМО.

Таблица 4.1 – Интенсивности обслуживания заявок в различных очередях СМО

i / μ	1	2	3
$\mu_i^{(v)}$	7	5	4
μ_i	6	4	2
$\mu_i^{(c)}$	1	8	3

Таблица 4.2 –Вероятности перехода заявок после обслуживания

	p_{ij}^+			p_{ij}^-			p_{i0}
j / i	1	2	3	1	2	3	
1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,3
3	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1

Расчеты ПФ выполнены в пакете компьютерной алгебры WolframMathematica.

Заключение

В статье представлена G-сеть, состоящая из ненадежных систем с КонО, КарО, и обслуживающими очередями и возможностью перемещения отрицательных заявок между СМО сети в качестве модели ИСС с АПО и способностью перехода вирусов по ПК сети и выхода многоядерных процессоров ИСС из строя. С помощью ММПФ найдены нестационарные вероятности состояний сети в режиме насыщения и средние характеристики сети. Показано, что число невредоносных файлов при проверке на наличие вирусов при функционировании ИСС в режиме насыщения зависит от числа этих заявок, пришедших в ИСС извне и в ре зультате перехода после обслуживания в данную СМО, а также от интенсивности проверки их на стандартность. Число вирусов в АПО зависит от числа вирусов, пришедших в КС извне, и также от эффективности работы ПО в других ПК ИСС при обнаружении резидентных и нерезидентных вирусов, то есть АПО в каждом ПК ИСС определяет загруженность работы другого.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe*, *E*. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of Applied Probability. – 1991. – Vol. 28. – P. 656–663.

2. *Matalytski*, *M*. Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages / M. Matalytski, V. Naumenko // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. – 2013. – Vol. 12, № 2. – P. 61–71.

3. *Копать*, *Д.Я*. Анализ G-сети с ненадежными линиями обслуживания / Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий // Вести Национальной академия наук Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2018. – Т. 54, № 4. – С. 441–453.

4. *Летунович*, *Ю.Е*. Открытые марковские сети массового обслуживания с контрольными очередями и карантинным узлом / Ю.Е. Летунович, О.В. Якубович // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – № 41. – С. 32–38.

5. *Маталыцкий*, *М.А*. Математическая модель компьютерных сетей с антивирусным программным обеспечением / М.А. Маталыцкий, Д.Я. Копать, В.В. Науменко // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2021. – Т. 11, № 3. – С. 37–45.

6. *Копать*, *Д.Я*. Нахождение ожидаемых доходов систем в G-сети с контрольной и карантинной очередями и перемещениями отрицательных заявок между системами сети / Д.Я. Копать // Информационно-коммуникационные технологии: достижения, проблемы, инновации (ИКТ-2022): сб. материалов II Междунар. науч.-практ. конф., Полоцк, 30-31 марта 2022 г. – Новополоцк: ПГУ им. Евфросинии Полоцкой, 2022. – С. 23–28.

7. *Назаров*, *А.А*. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А.А. Назаров, А.Ф. Терпугов. – 2-е изд., испр. – Томск: Изд-во НТЛ. 2010. – 228 с.

8. *Ивницкий*, *В.А*. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – Москва: Физматлит, 2004. – 772 с.

9. *Маталыцкий*, *М.А*. Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: монография / М.А. Маталыцкий, В.В. Науменко. – ГрГУ им. Я.Купалы. – Гродно: ГрГУ, 2016. – 346 с.

Поступила в редакцию 03.06.2024.

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – к.ф.-м.н., доцент