МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102
EDN: HUFLRZ

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ЯВНЫЙ ВИД ЛИНЕЙНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ЧЕБЫШЁВА

А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

UNIQUENESS AND EXPLICIT FORM OF HERMITE – CHEBYSHEV LINEAR APPROXIMATIONS

A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Опираясь на известные результаты о совместных аппроксимациях Эрмита – Паде системы тригонометрических рядов, найдены достаточные условия, при которых линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва существуют и определяются единственным образом. При выполнении найденных условий получены формулы, описывающие явный вид числителей и знаменателя линейных аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций, которые являются суммами рядов Фурье по многочленам Чебышёва первого и второго рода.

Ключевые слова: *ряды Фурье*, *ряды по многочленам Чебышёва*, *аппроксимации Эрмита – Паде*, *аппроксимации Паде – Чебышёва*, *линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва*.

Для цитирования: *Старовойтов*, *А.П.* Единственность и явный вид линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 102–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102. – EDN: HUFLRZ

Abstract. Relying on the known results on joint Hermite – Padé approximations of a system of trigonometric series, sufficient conditions are found under which linear Hermite – Chebyshev approximations exist and are determined uniquely. When the found conditions are met, the formulas are obtained that describe the explicit form of the numerators and denominator of linear Hermite – Padé approximations for a system of functions that are sums of Fourier series in Chebyshev polynomials of the first and second kind.

Keywords: *Fourier series*, *series in Chebyshev polynomials*, *Hermite – Padé approximations*, *Padé – Chebyshev approximations*, *linear Hermite – Chebyshev approximations.*

For citation: *Starovoitov*, *A.P.* Uniqueness and explicit form of Hermite – Chebyshev linear approximations / A.P. Starovoitov, I.V. Kruglikov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 102–107. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_102 (in Russian). – EDN: HUFLRZ

Введение

Пусть система $\mathbf{f^{ch1}} = (f_1^{ch1}, \ldots, f_k^{ch1})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ первого рода

$$f_j^{ch1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j T_l(x), \; j = 1, \ldots, k, \qquad (0.1)$$

с действительными коэффициентами, которые сходится при всех $x \in [-1,1]$. Обозначим чере $\mathbb{Z}_+^k$ множество всех k-мерных мультииндексов $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$, являющихся упорядоченным набором k целых неотрицательных чисел. Порядком мультииндекса $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ назовём сумму $m := m_1 + \ldots + m_k$.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующий аналог задачи Эрмита – Паде для $\mathbf{f^{ch1}}$ [1, гл. 4, §1]:

Задача $\mathbf{A^{ch1}}$. *Для системы функций* $\mathbf{f^{ch1}}$ *найти тождественно не равный нулю многочлен*

$$Q_m^{ch1}(x) = Q_{n,\vec{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f^{ch1}}) = \sum_{p=0}^{m} u_p T_p(x)$$

и многочлены

$$P_j^{ch1}(x) = P_{n_j,n,\vec{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f^{ch1}}) = \sum_{p=0}^{n_j} v_p^j T_p(x),$$

$$n_j = n + m - m_j,$$

чтобы для $j = 1, \ldots, k$

$$Q_m^{ch1}(x) f_j^{ch1}(x) - P_j^{ch1}(x) = \sum_{l=n+m+1}^{\infty} \tilde{a}_l^j T_l(x). \qquad (0.2)$$

Определение **0.1**. *Если пара* (Q_m^{ch1}, P^{ch1}), *где* $P^{ch1} = (P_1^{ch1}, \ldots, P_k^{ch1})$ *является решением задачи* $\mathbf{A^{ch1}}$, *то рациональные дроби*

$$\pi_j^{ch1}(x) = \pi_j^{ch1}(x; \mathbf{f^{ch1}}) = \pi_{n_j,n,\vec{m}}^{ch1}(x; \mathbf{f^{ch1}}) = \frac{P_j^{ch1}(x)}{Q_m^{ch1}(x)},$$

$$j = 1, \ldots, k,$$

будем называть линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 1-го рода для мультииндекса $(n,\vec{m})$ *и системы* $\mathbf{f^{ch1}}$.

***Определение* 0.2.** *Нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 1-го рода для мультииндекса* $(n,\vec{m})$ *и системы* $\mathbf{f^{ch1}}$ *назовём рациональные дроби*

$$\hat{\pi}_j^{ch1}(x)=\hat{\pi}_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})=\hat{\pi}_{n_j,n,\vec{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})=\frac{\hat{P}_j^{ch1}(x)}{\hat{Q}_m^{ch1}(x)},$$

где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch1}(x)=\hat{Q}_{n,\vec{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}),\ \ \hat{P}_j^{ch1}(x)=\hat{P}_{n_j,n,\vec{m}}^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}})$$

$(n_j=n+m-m_j)$, *степени которых не превышают соответственно m и* n_j, *подобраны так, что*

$$f_j^{ch1}(x)-\frac{\hat{P}_j^{ch1}(x)}{\hat{Q}_m^{ch1}(x)}=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}\hat{a}_l^jT_l(x),\ j=1,\ldots,k.$$

В том случае, когда $k=1$, т. е. система $\mathbf{f^{ch1}}$ состоит из одной функции f_1^{ch1}, основные свойства линейных и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва (в этом случае их называют линейными и нелинейными аппроксимациями Паде – Чебышёва; подробнее о терминологии см. [2]) описаны достаточно подробно (прежде всего см. [2]–[4] и приведённую там литературу, а также [5]–[13]). Например, хорошо известно, что линейная аппроксимация Паде – Чебышёва всегда существует, но в отличии от классической аппроксимации Паде степенного ряда, вообще говоря, не единственна. Нелинейная аппроксимация Паде – Чебышёва не всегда существует, но в случае существования всегда единственна. Имеются примеры сходящихся рядов f_1^{ch1} (см. [14], [15]), для которых нелинейные аппроксимации Паде – Чебышёва существуют и единственны, но при каждом *n* не являются линейными аппроксимациями Паде – Чебышёва. Аналогично, при любом $k\geqslant 1$ имеются примеры систем функций $\mathbf{f^{ch1}}$ (см. [9]), для которых существуют нелинейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва, не являющиеся линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва.

Рассмотрим теперь другой тип аппроксимаций Эрмита – Чебышёва. Предположим, что система $\mathbf{f^{ch2}}=(f_1^{ch2},\ldots,f_k^{ch2})$ состоит из функций, представимых рядами Фурье по многочленам Чебышёва $U_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x)$ второго рода

$$f_j^{ch2}(x)=\sum_{l=1}^{\infty}b_l^jU_l(x),\ j=1,\ldots,k,\qquad(0.3)$$

с действительными коэффициентами, которые сходятся при всех $x\in[-1,1]$. Если вместо рядов (0.1) взять ряды (0.3), то конструкции, аналогичные предыдущим, приводят к линейным и нелинейным аппроксимациям Эрмита – Чебышёва 2-го рода. Задача Эрмита – Паде для рядов (0.3) имеет вид:

Задача $\mathbf{A^{ch2}}$. *Найти алгебраический многочлен* $Q_m^{ch2}(x)=Q_{n,\vec{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$, $\deg Q_m^{ch2}\leqslant m$, *тождественно не равный нулю, и алгебраические многочлены* $P_j^{ch2}(x)=P_{n_j,n,\vec{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$, $n_j=n+m-m_j$, *чтобы для* $j=1,\ldots,k$

$$Q_m^{ch2}(x)f_j^{ch2}(x)-P_j^{ch2}(x)=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}\tilde{b}_l^jU_l(x).\qquad(0.4)$$

***Определение* 0.3.** *Если пара* (Q_m^{ch2},P^{ch2}), *где* $P^{ch2}=(P_1^{ch2},\ldots,P_k^{ch2})$ *является решением задачи* $\mathbf{A^{ch2}}$, *то рациональные дроби*

$$\pi_j^{ch2}(x)=\pi_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})=\pi_{n_j,n,\vec{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})=\frac{P_j^{ch2}(x)}{Q_m^{ch2}(x)},$$

$$j=1,\ldots,k,$$

будем называть линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 2-го рода для мультииндекса $(n,\vec{m})$ *и системы* $\mathbf{f^{ch2}}$.

***Определение* 0.4.** *Нелинейными аппроксимациями Эрмита – Чебышёва 2-го рода для мультииндекса* $(n,\vec{m})$ *и системы* $\mathbf{f^{ch2}}$ *назовём алгебраические рациональные дроби*

$$\hat{\pi}_j^{ch2}(x)=\hat{\pi}_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})=\hat{\pi}_{n_j,n,\vec{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})=\frac{\hat{P}_j^{ch2}(x)}{\hat{Q}_m^{ch2}(x)},$$

где многочлены

$$\hat{Q}_m^{ch2}(x)=\hat{Q}_{n,\vec{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}}),\ \ \hat{P}_j^{ch2}(x)=\hat{P}_{n_j,n,\vec{m}}^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})$$

$(n_j=n+m-m_j)$, *степени которых не превышают соответственно m и* n_j, *подобраны так, что*

$$f_j^{ch2}(x)-\frac{\hat{P}_j^{ch2}(x)}{\hat{Q}_m^{ch2}(x)}=\sum_{l=n+m+1}^{\infty}\hat{b}_l^jU_l(x),\ j=1,\ldots,k.$$

В дальнейшем будем рассматривать только *линейные* аппроксимации Эрмита – Чебышёва, а основной темой исследований данной работы является нахождение условий на коэффициенты рядов (0.1) и (0.3), при которых линейные аппроксимации Эрмита – Чебышёва 1-го и 2-го определяются единственным образом. В случае единственности будем искать явный вид этих аппроксимаций. Доказательство основных теорем работы существенно опирается на установленную в [10], [11] связь между линейными аппроксимациями Эрмита – Чебышева и тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде системы функций, являющихся суммами соответствующих сходящихся тригонометрических рядов. Отметим, что существование линейных аппроксимаций

$$\pi_j^{ch1}(x;\mathbf{f^{ch1}}),\ \ \pi_j^{ch2}(x;\mathbf{f^{ch2}})\ \ (j=1,\ldots,k)$$

при $k>1$ доказывается также, как и в случае $k=1$ (см. [5], [8]).

1 Тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде

В этом разделе опишем ряд новых свойств тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Паде. Эти свойства будут получены нами в виде следствий результатов работ [10], [11].

Пусть $\mathbf{f^t} = (f_1^t, ..., f_k^t)$ – набор тригонометрических рядов

$$f_j^t(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(a_l^j \cos lx + b_l^j \sin lx\right), j = 1,\dots,k, \quad (1.1)$$

с действительными коэффициентами. Считаем, что ряды (1.1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$ и каждый ряд определяет функцию f_j^t, заданную на всей действительной прямой. Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и мультииндекс $\vec{m} = (m_1, \dots, m_k)$ и для системы $\mathbf{f^t}$ рассмотрим тригонометрический аналог задачи Эрмита – Паде:

Задача $\mathbf{A^t}$. *Для тригонометрических рядов* (1.1) *найти тождественно не равный нулю тригонометрический многочлен* $Q_m^t(x) = Q_{n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{f^t})$, $\deg Q_m^t \leqslant m$ *и такие тригонометрические многочлены*

$$P_j^t(x) = P_{n_j,n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{f^t}), \ \deg P_j^t \leqslant n_j, \ \ n_j = n + m - m_j,$$

чтобы

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) =$$

$$= \sum_{l=n+m+1}^{\infty} (\tilde{a}_l^j \cos lx + \tilde{b}_l^j \sin lx), j = 1,\dots,k. \quad (1.2)$$

Условиями (1.2) многочлены Q_m^t, $P_1^t,\dots,P_k^t$ находятся с точностью до числового множителя. Однако, их неединственность может быть и более существенной (см. [10], [11]).

***Определение* 1.1.** *Будем говорить, что задача* $\mathbf{A^t}$ *имеет единственное решение, если это решение единственно с точностью до числового множителя, т. е. для любых двух решений* $(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t)$ *и* $(\bar{\bar{Q}}_m^t, \bar{\bar{P}}^t)$ *задачи* $\mathbf{A^t}$ *существует число* λ, *что*

$$(\bar{Q}_m^t, \bar{P}^t) = (\lambda \bar{\bar{Q}}_m^t, \lambda \bar{\bar{P}}^t).$$

Здесь $P^t := (P_1^t, \dots, P_k^t)$, $\lambda P^t := (\lambda P_1^t, \dots, \lambda P_k^t)$.

***Определение* 1.2.** *Если пара* (Q_m^t, P^t) *является решением задачи* $\mathbf{A^t}$, *то тригонометрические рациональные дроби*

$$\pi_j^t(x) = \pi_j^t(x;\mathbf{f^t}) = \pi_{j,n,\vec{m}}^t(x;\mathbf{f^t}) = \frac{P_j^t(x)}{Q_m^t(x)}, j = 1,\dots,k$$

будем называть тригонометрическими аппроксимациями Эрмита – Паде (совместными аппроксимациями Эрмита – Фурье) для мультииндекса $(n,\vec{m})$ *и системы* $\mathbf{f^t}$.

В отличие от аппроксимаций Паде степенного ряда тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде определяются, вообще говоря, не однозначно, в то время как задача $\mathbf{A^t}$ всегда имеет решение [10], [11]. В том случае, когда задача $\mathbf{A^t}$ имеет единственное решение, тригонометрические аппроксимации Эрмита – Паде $\left\{\pi_j^t(x;\mathbf{f^t})\right\}_{j=1}^k$ определяются однозначно. При $k = 1$ достаточное условие единственности решения задачи $\mathbf{A^t}$ получено в [5]. Для произвольного $k \geqslant 1$ необходимое и достаточное условие единственности решения задачи $\mathbf{A^t}$ установлено в [10], [11]. Для его формулировки введём обозначения.

Запишем ряды (1.1) и многочлены $Q_m^t(x), P_j^t(x)$ в комплексной форме:

$$f_j^t(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^j e^{ilx}, \quad (1.3)$$

$$Q_m^t(x) = \sum_{p=-m}^{m} u_p e^{ipx}, P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} v_p^j e^{ipx}, \quad (1.4)$$

где

$$u_p, v_p^j \in \mathbb{C}, \ c_0^j = \frac{a_0^j}{2}, \ c_l^j = \frac{a_l^j - ib_l^j}{2}, \ c_{-l}^j = \bar{c}_l^j,$$

$$j = 1,\dots,k; \ l = 1,\dots$$

Тогда равенства (1.2) примут вид

$$Q_m^t(x) f_j^t(x) - P_j^t(x) =$$

$$= \sum_{l=n+m+1}^{+\infty} \left(\tilde{c}_l^j e^{ilx} + \tilde{c}_{-l}^j e^{-ilx}\right), \ j = 1,\dots,k.$$

Рассмотрим матрицы и определители, элементами которых являются коэффициенты тригонометрических рядов $f_j^t(x)$ системы $\mathbf{f^t}$. Каждому $l \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие матрицы-строки

$$\mathbb{C}_l^j := \left(c_{l+m}^j \ \ c_{l+m-1}^j \ \dots \ c_{l+1}^j \ \ c_l^j \ \ c_{l-1}^j \ \dots \ c_{l-m+1}^j \ \ c_{l-m}^j\right),$$

$j = 1,\dots,k$, а действительному числу x – матрицу-строку

$$E_m^t(x) := \left(e^{-imx} e^{-i(m-1)x} \dots e^{-ix} 1 e^{ix} \dots e^{i(m-1)x} e^{imx}\right).$$

Для заданного $j \in \{1,\dots,k\}$, фиксированных индекса $n \in \mathbb{Z}_+^1$ и ненулевого мультииндекса $\vec{m} = (m_1,\dots,m_k)$ в предположении, что $m_j \neq 0$, определим матрицы порядка $m_j \times (2m+1)$

$$F_+^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{n_j+m_j}^j \\ \mathbb{C}_{n_j+m_j-1}^j \\ \vdots \\ \mathbb{C}_{n_j+1}^j \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{n_j+m+m_j}^j & c_{n_j+m+m_j-1}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j}^j \\ c_{n_j+m+m_j-1}^j & c_{n_j+m+m_j-2}^j & \dots & c_{n_j-m+m_j-1}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_j+m+1}^j & c_{n_j+m}^j & \dots & c_{n_j-m+1}^j \end{pmatrix},$$

$$F_-^j := \begin{bmatrix} \mathbb{C}^j_{-n_j-1} \\ \mathbb{C}^j_{-n_j-2} \\ \vdots \\ \mathbb{C}^j_{-n_j-m_j} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c^j_{-n_j+m-1} & c^j_{-n_j+m-2} & \dots & c^j_{-n_j-m-1} \\ c^j_{-n_j+m-2} & c^j_{-n_j+m-3} & \dots & c^j_{-n_j-m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^j_{-n_j+m-m_j} & c^j_{-n_j+m-m_j-1} & \dots & c^j_{-n_j-m-m_j} \end{pmatrix}.$$

Введём в рассмотрение определитель порядка $2m+1$

$$D(n,\vec{m};x) :=$$

$$:= \det\left[F_+^k \ \dots \ F_+^2 \ F_+^1 \ E_m^t(x) \ F_-^1 \ F_-^2 \ \dots \ F_-^k\right]^T :=$$

$$:= \det \begin{bmatrix} F_+^k \\ \vdots \\ F_+^1 \\ E_m^t(x) \\ F_-^1 \\ \vdots \\ F_-^k \end{bmatrix}.$$

В случае, если $m_j = 0,$ считаем, что определитель $D(n,\vec{m};x)$ не содержит блок-матриц $F_\pm^j$. Обозначим через $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^t})$ матрицу порядка $2m \times (2m+1)$, полученную из элементов определителя $D(n,\vec{m};x)$ после удаления в нём $(m+1)$-ой строки $E_m^t(x)$. Если в определителе $D(n,\vec{m};x)$ строку $E_m^t(x)$ заменить на строку $\mathbb{C}_l^j$, получим новый определитель $d_l^j(n,\vec{m})$.

***Теорема* 1.1** [10], [11]. *Задача* $\mathbf{A^t}$ *всегда имеет решение. Для того, чтобы для фиксированного мультииндекса* $(n,\vec{m})$, $\vec{m} \neq (0,\dots,0)$ *и системы* $\mathbf{f^t}$ *задача* $\mathbf{A^t}$ *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы* $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^t})$ *была матрицей полного ранга, т. е.* $rankH^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^t}) = 2m.$

Если $rankH^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^t}) = 2m$, *то при определённом выборе нормирующего множителя для решений задачи* $\mathbf{A^t}$ *справедливы представления: при* $j = 1,\dots,k$

$$Q_m^t(x) = D(n,\vec{m};x), \qquad (1.5)$$

$$P_j^t(x) = \sum_{p=-n_j}^{n_j} d_p^j(n,\vec{m})e^{ipx}, \qquad (1.6)$$

$$Q_m^t(x)f_j^t(x) - P_j^t(x) =$$
$$= \sum_{p=n+m+1}^{\infty}\left(d_p^j(n,\vec{m})e^{ipx} + d_{-p}^j(n,\vec{m})e^{-ipx}\right). \qquad (1.7)$$

***Следствие* 1.1.** *Если* $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^t})$ *является матрицей полного ранга, то коэффициенты многочленов* (1.5) *и* (1.6) *являются действительными числами.*

Рассмотрим две системы $\mathbf{f^{t1}} = (f_1^{t1},\dots,f_k^{t1})$, $\mathbf{f^{t2}} = (f_1^{t2},\dots,f_k^{t2})$ тригонометрических рядов, которые ассоциированы с системами (0.1) и (0.3):

$$f_j^{t1}(x) = \frac{a_0^j}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j \cos lx,$$

$$f_j^{t2}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} b_l^j \sin lx.$$

***Следствие* 1.2.** *Для системы* $\mathbf{f^{t1}}$ *формулы* (1.5)–(1.7) *принимают вид*:

$$Q_m^t(x;\mathbf{f^{t1}}) = \sum_{p=0}^{m} \overline{u}_p \cos px, \ P_j^t(x;\mathbf{f^{t1}}) = \sum_{p=0}^{n_j} \overline{v}_p^j \cos px,$$

$$\left(Q_m^t f_j^t - P_j^t\right)(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \overline{h}_p^j \cos px,$$

где $\overline{u}_p$, $\overline{v}_p^j$, $\overline{h}_p^j = 2d_p^j(n,\vec{m})$ *– действительные числа.*

***Следствие* 1.3.** *Для системы* $\mathbf{f^{t2}}$ *формулы* (1.5)–(1.7) *принимают вид*:

$$Q_m^t(x;\mathbf{f^{t2}}) = \sum_{p=0}^{m} \tilde{u}_p \cos px, \qquad (1.8)$$

$$P_j^t(x;\mathbf{f^{t2}}) = \sum_{p=0}^{n_j} \tilde{v}_p^j \sin px, \qquad (1.9)$$

$$\left(Q_m^t f_j^{t2} - P_j^t\right)(x) = \sum_{p=n+m+1}^{\infty} \tilde{h}_p^j \sin px, \qquad (1.10)$$

где $\tilde{u}_p$, $\tilde{v}_p^j$, $\tilde{h}_p^j = 2id_p^j(n,\vec{m})$ *– действительные числа.*

Доказательство следствия 1.3. Следствие 1.1 доказано в [11], а следствие 1.2 доказывается аналогично следствию 1.3.

Для системы $\mathbf{f^{t2}}$ получаем, что $c_0 = 0$, $c_l = -i\dfrac{b_l}{2}$, $c_{-l} = -c_l$, $l = 1,2,\dots$ В этом случае блок-матрицы $F_\pm^j$ этой системы имеют вид:

$$F_+^j = \begin{pmatrix} c^j_{n_j+m+m_j} & c^j_{n_j+m+m_j-1} & \dots & c^j_{n_j-m+m_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^j_{n_j+m+1} & c^j_{n_j+m} & \dots & c^j_{n_j-m+1} \end{pmatrix},$$

$$F_-^j = \begin{pmatrix} -c^j_{n_j-m+1} & -c^j_{n_j-m+2} & \dots & -c^j_{n_j+m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c^j_{n_j-m+m_j} & -c^j_{n_j-m+m_j-1} & \dots & -c^j_{n_j+m+m_j} \end{pmatrix}.$$

Поэтому нетрудно убедится, что множители при степенях e^{ipx} и e^{-ipx} в правой части равенства (1.5) совпадают, а в равенствах (1.6) и (1.7)

$$d_{-p}^j(n,m) = -d_p^j(n,m), \ p = 1,2,\dots, \ j = 1,\dots,k.$$

Отсюда следует справедливость равенств (1.8)–(1.10). Заметим также, что $\mathrm{Re}\{d_p^j(n,\vec{m})\} = 0.$ □

2 Единственность линейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

***Теорема* 2.1.** *Пусть для мультииндекса* $(n,\vec{m})$, $\vec{m}\neq(0,\ldots,0)$ *матрица* $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^{t1}})$ *имеет полный ранг, т. е.* $rankH^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^{t1}})=2m$. *Тогда*

1) *для системы* $\mathbf{f^{t1}}$ *решение задачи* $\mathbf{A^{ch1}}$ *существует и единственно*;

2) *линейные аппроксимации Эрмита – Чебышева* $\{\pi^{ch1}_j(x;\mathbf{f^{t1}})\}^k_{j=1}$ *условиями* (0.2) *определяются однозначно*;

3) *при соответствующей нормировке справедливы представления*:

$$Q^{ch1}_m(x;\mathbf{f^{t1}})=Q^t_m\left(\arccos x;\mathbf{f^{t1}}\right),$$

$$P^{ch1}_j(x;\mathbf{f^{t1}})=P^t_j(\arccos x;\mathbf{f^{t1}}),$$

$$\left(Q^{ch1}_m f^{ch1}_j-P^{ch1}_j\right)(x)=\sum_{p=n+m+1}^{\infty}2d^j_p(n,\vec{m})T_p(x),$$

где многочлены $Q^t_{n,m}(\cdot;\mathbf{f^{t1}})$, $P^t_j(\cdot;\mathbf{f^{t1}})$ *определяются равенствами* (1.5), (1.6).

***Теорема* 2.2.** *Пусть для мультииндекса* $(n,\vec{m})$, $\vec{m}\neq(0,\ldots,0)$ *матрица* $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^{t2}})$ *имеет полный ранг, т. е.* $rankH^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^{t2}})=2m$. *Тогда*

1) *для системы* $\mathbf{f^{t2}}$ *решение задачи* $\mathbf{A^{ch2}}$ *существует и единственно*;

2) *линейные аппроксимации Эрмита –Чебышева* $\{\pi^{ch2}_j(x;\mathbf{f^{t2}})\}^k_{j=1}$ *условиями* (0.4) *определяются однозначно*;

3) при соответствующей нормировке *справедливы представления*:

$$Q^{ch2}_m(x;\mathbf{f^{t2}})=Q^t_m\left(\arccos x;\mathbf{f^{t2}}\right), \qquad (2.1)$$

$$P^{ch2}_j(x;\mathbf{f^{t2}})=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}P^t_j(\arccos x;\mathbf{f^{t2}}), \quad (2.2)$$

$$\left(Q^{ch2}_m f^{ch2}_j-P^{ch2}_j\right)(x)=\sum_{p=n+m+1}^{\infty}2id^j_p(n,\vec{m})U_p(x), \quad (2.3)$$

где многочлены $Q^t_{n,m}(\cdot;\mathbf{f^{t2}})$, $P^{t2}_j(\cdot;\mathbf{f^{t2}})$ *определяются равенствами* (1.5), (1.6), *а* $id^j_p(n,\vec{m})$ *– действительные числа.*

Доказательство теоремы 2.2. Теорема 2.1 доказывается аналогично.

Рассмотрим ассоциированную с системой $\mathbf{f^{ch2}}=(f^{ch2}_1,\ldots,f^{ch2}_k)$ систему тригонометрических функций $\mathbf{f^{t2}}=(f^{t2}_1,\ldots,f^{t2}_k)$. На отрезке $[-1,1]$ справедливы тождества

$$f^{t2}_j(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}\,f^{ch2}_j(x),\ j=1,\ldots,k.$$

Поскольку матрица $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^{t2}})$ имеет полный ранг, то по теореме 1.1 для системы $\mathbf{f^{t2}}$ задача $\mathbf{A^t}$ имеет единственное решение. Согласно следствию 1.3 в этом случае для тригонометрических многочленов Эрмита – Паде справедливы формулы (1.8)–(1.10). Заменим в равенствах (1.8)–(1.10) x на $\arccos x$, а затем разделим равенства (1.9) и (1.10) на $\sqrt{1-x^2}$. В результате получим

$$Q^t_m\left(\arccos x;\mathbf{f^{t2}}\right)=\sum_{p=0}^{n}\tilde{u}_pT_p(x),$$

$$\frac{P^t_j(\arccos x;\mathbf{f^{t2}})}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{p=0}^{n}\tilde{v}^j_pU_p(x),$$

$$Q^{ch2}_m(\arccos x;\mathbf{f^{t2}})f^{ch2}_j(x)-\frac{P^t_j(\arccos x;\mathbf{f^{t2}})}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\sum_{p=n+m+1}^{\infty}n\tilde{h}^j_pU_p(x),$$

где $\tilde{h}^j_p=2id^j_p(n,\vec{m})$ – действительные числа. Отсюда следует справедливость равенств (2.1)–(2.3). □

Замечание. Теоремы 2.1 и 2.2 являются новыми и представляют самостоятельный интерес и в случае, когда $k=1$. Так в работе [8] при $k=1$ достаточные условия единственности линейных аппроксимаций Паде – Чебышёва 1-го рода получены только для верхней части таблицы Паде – Чебышёва (в условии предполагается, что $n\geqslant m-1$). Доказательство основного результата в этой работе основано на описании структуры ядра некоторых *теплиц-плюс-ганкелевых* матриц, элементами которых являются коэффициенты ряда $f^{ch}_1(x)$. В частности, в [8] установлено, что для единственности линейной аппроксимации Паде – Чебышёва достаточно, чтобы соответствующая теплиц-плюс-ганкелева матрица имела полный ранг. Отметим, что в отличии от матрицы $H^t_{n,\vec{m}}(\mathbf{f^{t1}})$ при $k=1$, теплиц-плюс-ганкелева матрица в [8], описывающая достаточные условия единственности, имеет существенно более сложную структуру. По этой причине сравнить (проверить эквивалентность!) достаточные условия в [8] и в теореме 2.1 при $k=1$ и $n\geqslant m-1$, похожие своими формулировками, не представляется возможным.

Отметим также, что для линейных аппроксимаций Паде – Чебышёва 2-го рода задача нахождения достаточных условий единственности до настоящего времени не исследовалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – Москва: Наука, 1988.

2. *Суетин*, *С.П.* О существовании нелинейных аппроксимаций Паде – Чебышёва для аналитических функций / С.П. Суетин // Математические заметки. – 2009. – Т. 86, № 2. – С. 290–303.

3. *Гончар*, *А.А.* Аппроксимации Паде – Чебышёва для многозначных аналитических

функций, вариация равновесной энергии и *S*-свойство стационарных компактов / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2011. – Т. 66, № 6. – С. 3–36.

4. *Бейкер мл.*, *Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – Москва: Мир, 1986.

5. *Лабыч*, *Ю.А.* Тригонометрические аппроксимации Паде функций с регулярно убывающими коэффициентами Фурье / Ю.А. Лабыч, А.П. Старовойтов // Математический сборник. – 2009. – Т. 200, № 7. – С. 107–130.

6. *Geddes*, *K.O.* Block structure in the Chebyshev – Padé table / K.O. Geddes // SIAM J. Numer. Anal. – 1981. – Vol. 18, № 5. – P. 844 – 861.

7. *Адуков*, *В.М.* Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / В.М. Адуков, О.Л. Ибряева // Вестник ЮУрГУ. Серия математика, физика, химия. – 2005. – Т. 6, № 6. – С. 11–18.

8. *Ибраева*, *О.Л.* Асимптотическое поведение знаменателей аппроксимаций Паде – Чебышёва для последней промежуточной строки. Рациональный случай / О.Л. Ибряева // Известия Челябинского научного центра. – 2002. – № 4. – С. 1–5.

9. *Старовойтов*, *А.П.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – № 2. – С. 6–17.

10. *Старовойтов*, *А.П.* Существование и единственность совместных аппроксимаций Эрмита – Фурье / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко, Т.М. Оснач // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 68–73.

11. *Старовойтов*, *А.П.* О существовании тригонометрических аппроксимаций Эрмита – Якоби и нелинейных аппроксимаций Эрмита – Чебышёва / А.П. Старовойтов, И.В. Кругликов, Т.М. Оснач // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2024. – № 3. – С. 6–12.

12. *Mason*, *J.C.* Laurent – Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. I. Maehly type approximants / J.C. Mason, A. Crampton // Numerical Algorithms. – 2005. – Vol. 38: 1–3. – C. 3–18.

13. *Mason*, *J.C.* Laurent – Padé approximants to four kinds of Chebyshev polynomial expansions. II. Clenshaw – Lord type approximants / J.C. Mason, A. Crampton // Numerical Algorithms. – 2005. – Vol. 38:1–3. – C. 19–29.

14. *Суетин*, *С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи математических наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

15. *Суетин*, С.П. Вопросы сходимости аппроксимаций Паде – Фабера. Дисс. ... канд. физ.-матем. наук / С.П. Суетин. – Москва: МГУ, 1981.

Поступила в редакцию 27.11.2024.

Информация об авторах

Старовойтов Александр Павлович – д.ф.-м.н., профессор
Кругликов Игорь Викторович – студент