МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87
EDN: OQGGJH

О σ-ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕННЫМ $\mathfrak{H}_\sigma$-ДЕФЕКТОМ

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON σ-LOCAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS WITH BOUNDED $\mathfrak{H}_\sigma$-DEFECT

I.N. Safonova, V.V. Skrundz

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – некоторые σ-локальные формации конечных групп. Тогда через $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ обозначают решетку всех σ-локальных формаций $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. Длину решетки $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ называют $\mathfrak{H}_\sigma$*-дефектом* σ-локальной формации $\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{H}$ – формация всех единичных групп, то $\mathfrak{H}_\sigma$-дефект σ-локальной формации $\mathfrak{F}$ называют l_σ*-длиной* формации $\mathfrak{F}$. Изучены общие свойства $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта σ-локальных формаций, получено описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для произвольной σ-нильпотентной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$, дано описание решеточного строения σ-локальных формаций $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта 1. Получены описания решеточного строения приводимых σ-локальных формаций конечного $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта, а также решеточного строения приводимых σ-локальных формаций конечной l_σ-длины.

Ключевые слова: *конечная группа*, *σ-локальная формация*, *критическая σ-локальная формация*, $\mathfrak{H}_\sigma$*-дефект σ-локальной формации*, l_σ*-длина σ-локальной формации*.

Для цитирования: *Сафонова*, *И.Н.* О σ-локальных формациях конечных групп с ограниченным $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 1 (62). – С. 87–101. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87. – EDN: OQGGJH

Abstract. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be some σ-local formations of finite groups. Then $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ denote the lattice of all σ-local formations $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{X}\subseteq\mathfrak{F}$. The length of the lattice $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}$ is called a $\mathfrak{H}_\sigma$*-defect* of the σ-local formation $\mathfrak{F}$. In particular, if $\mathfrak{H}$ is the formation of all identity groups, then the $\mathfrak{H}_\sigma$-defect of a σ-local formation $\mathfrak{F}$ is called a l_σ*-length* of the formation $\mathfrak{F}$. The general properties of $\mathfrak{H}_\sigma$-defect of σ-local formations are studied, the description of minimal σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations for an arbitrary σ-nilpotent σ-local formation $\mathfrak{H}$ is obtained, the description of the lattice structure of σ-local formations of $\mathfrak{H}_\sigma$-defect 1 is given. The descriptions of the lattice structure of reducible σ-local formations of finite $\mathfrak{H}_\sigma$-defect, as well as the lattice structure of reducible σ-local formations of finite l_σ-length are obtained.

Keywords: *finite group*, *σ-local formation*, *critical σ-local formation*, $\mathfrak{H}_\sigma$*-defect of a σ-local formation*, l_σ*-length of a σ-local formation*.

For citation: *Safonova*, *I.N.* On σ-local formations of finite groups with bounded $\mathfrak{H}_\sigma$-defect / I.N. Safonova, V.V. Skrundz // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 1 (62). – P. 87–101. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_1_62_87 (in Russian). – EDN: OQGGJH

Введение

Все рассматриваемые группы являются конечными. Мы придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1]–[4].

Изучение и классификация формаций с заданными ограничениями на решетки их подформаций является одной из наиболее интересных и содержательных задач теории формаций конечных групп. Установленная А.Н. Скибой [5] модулярность решетки всех формаций, а также решетки всех локальных формаций, позволила привлечь методы и конструкции общей теории решеток при изучении внутреннего строения формаций конечных групп. Изучение структурного строения локальной формации $\mathfrak{F}$ на основе свойств достаточно хорошо изученной ее подформации впервые было проведено А.Н.Скибой и Е.А.Таргонским [6]. Данный подход основывался на введенном ими понятии $\mathfrak{H}$-дефекта локальной формации. В работе [6] были изучены основные свойства $\mathfrak{H}$-дефекта локальной формации, а также получена классификация локальных формаций нильпотентного дефекта ≤ 2. Впоследствии данный метод широко использовался при изучении структурного строения не только локальных формаций [7]–[17], но и ряда формаций других типов, таких как функторно замкнутые кратно локальные формации [2], [18], [19], тотально насыщенные формации [20]–[22], частично насыщенные [23]–[28] и др. При этом, в качестве $\mathfrak{H}$ рассматривалась не только формация всех нильпотентных групп, но и другие достаточно хорошо известные классы (класс всех p-разложимых, p-нильпотентных, π-разложимых, π-нильпотентных, p-замкнутых, метанильпотентных, разрешимых, сверхразрешимых групп и др.).

Отметим, что указанные результаты базировались на разработанной теории минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций. Напомним, что формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией [29] или $\mathfrak{H}_l$-критической формацией [30], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Общая задача изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [29]. Решение этой задачи для локальных формаций было получено А.Н. Скибой в цикле работ [30]–[34], завершающим результатом которого стало описание $\mathfrak{H}_l$-критических формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [34], т. е. формация имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны.

Развитие теории σ-локальных формаций привело к необходимости изучения и классификации критических σ-локальных формаций. В этой связи задача Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в теории σ-локальных формаций была решена в работах [35], [36] для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

В данной работе, используя разработанные методы теории критических σ-локальных формаций, мы изучаем структурное строение σ-локальных формаций на основе идей работы [6]. Следуя [2], [6], мы вводим понятие $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта σ-локальной формации, а также l_σ-длины σ-локальной формации и изучаем структурное строение σ-локальных формаций конечного $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта и конечной l_σ-длины.

Основными результатами являются: описание минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций (теорема 3.4) для произвольной σ-нильпотентной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$, т. е. неприводимых σ-локальных формаций $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта 1; доказано существование формаций такого вида во всякой σ-локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ (теорема 3.8); описание структурного строения σ-локальных формаций $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта 1 (теорема 3.14) и их характеризация (теорема 3.18); описание структурного строения приводимых σ-локальных формаций конечного $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта (теорема 4.1), а также описание внутреннего строения приводимых σ-локальных формаций конечной l_σ-длины (теорема 4.5).

Основные результаты работы мы доказываем в разделах 3 и 4, а также рассматриваем некоторые, наиболее интересные, следствия полученных результатов.

1 Основные определения и обозначения

Основные понятия теории σ-свойств групп, а также общие свойства σ-локальных формаций и их решеток представлены в работах [3], [4] и [37]–[48].

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, то $\sigma(n)$ обозначает множество

$$\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\};\ \ \sigma(G) = \sigma(|G|).$$

Группа G называется [3]: σ-*примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого i; σ-*нильпотентной*, если G – прямое произведение σ-примарных групп.

Класс всех σ-нильпотентных групп обозначают символом $\mathfrak{N}_\sigma$, а класс всех единичных групп символом (1).

Функция f вида $f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$ называется *формационной* σ-*функцией* [4]. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$$
$$\text{для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ-*локальной*, а f является σ-*локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Совокупность всех σ-локальных формаций обозначают через l_σ. Формации из l_σ называют l_σ-*формациями*.

Пусть f – формационная σ-функция. Тогда символом $\mathrm{Supp}(f)$ обозначают *носитель* f, то есть, множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Формационную σ-функцию f называют: *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i.

Если F – полная внутренняя формационная σ-функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, то F называют *каноническим σ-локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Мы также используем $\cap_{j\in J} f_j$ для обозначения *формационной σ-функции* H такой, что $h(\sigma_i) = \cap_{j\in J} f_j(\sigma_i)$, в частности,

$$h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i),$$

для всех i.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ множество всех σ-локальных определений формации $\mathfrak{F}$. Тогда $f = \cap_{j\in J} f_j$ называют *наименьшим σ-локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторая совокупность групп. Через $l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X})$ обозначают пересечение всех σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, и называют σ-локальной формацией, порожденной совокупностью групп $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$ для некоторой группы G, то $\mathfrak{F}$ называют однопорожденной σ-локальной формацией.

Для произвольного набора групп $\mathfrak{X}$ и любого $\sigma_i \in \sigma$ символом $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [39, с. 962] обозначают класс групп, определенный следующим образом: $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \varnothing$, если $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый набор групп. Для любого $\sigma_i \in \sigma$ и всякого неотрицательного целого числа n, следуя [2, с. 31], мы определяем класс групп $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i)$ следующим образом: $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i) = l_n^\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_n^\sigma(\sigma_i) = \varnothing$, если $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$. В частности, если $n = 0$, то $\mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}_0^\sigma(\sigma_i) = \varnothing$, если $\sigma_i \in \sigma \setminus \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть теперь $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор σ-локальных формаций. Тогда мы полагаем $\vee_\sigma(\mathfrak{F}_j \mid j \in J) = l_\sigma\mathrm{form}(\cup_{j\in J}\mathfrak{F}_j)$. В частности, если $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ – σ-локальные формации, то

$$\mathfrak{H} \vee_\sigma \mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(\mathfrak{H} \cup \mathfrak{F}).$$

Следуя [29], [30], *минимальной σ-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* или $\mathfrak{H}_\sigma$*-критической формацией* мы называем σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

σ-Локальную формацию $\mathfrak{H}$ мы называем *σ-локальной формацией классического типа*, если $\mathfrak{H}$ имеет такое σ-локальное определение, все неабелевы значения которого σ-локальны.

Напомним [2, с. 12], что непустой набор формаций θ называется *полной решеткой формаций*, если пересечение любого множества формаций из θ снова принадлежит θ, а множество θ содержит формацию $\mathfrak{M}$, такую, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$ для всех $\mathfrak{H} \in \theta$. Всякую формацию из θ называют θ-*формацией*.

Для любых двух θ-формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, через $\mathfrak{H}/_\theta \mathfrak{M}$ обозначают [2, с. 168] решетку θ-формаций $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. В частности, через $\mathfrak{H}/_\sigma \mathfrak{M}$ обозначают решётку σ-локальных формаций $\mathfrak{X}$ таких, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть θ – некоторая полная модулярная решетка формаций.

Напомним [2, с. 192], что для любых двух θ-формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ через $|\mathfrak{F} : \mathfrak{M}|_\theta$ обозначают длину решетки $\mathfrak{F}/_\theta \mathfrak{M}$ θ-формаций, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – произвольные θ-формации. Тогда $\mathfrak{H}_\theta$*-дефектом* формации $\mathfrak{F}$ называют длину решетки $\mathfrak{F}/_\theta \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ (конечную или бесконечную) и обозначают $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\theta$.

В частности, следуя [2, с. 192] $\mathfrak{H}_\sigma$*-дефектом* σ-локальной формации $\mathfrak{F}$ мы будем называть длину решетки $\mathfrak{F}/_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ и обозначать $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$.

Пусть 0_θ – нуль решетки θ, $\mathfrak{F} \in \theta$. Тогда θ-*длиной* [2, с. 212] формации $\mathfrak{F}$ называют кардинальное число $|\mathfrak{F} : 0_\theta|_\theta$. В частности, *длиной* формации $\mathfrak{F}$ называют число $l(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : \varnothing|$; *длиной* локальной формации $\mathfrak{F}$ называют число $l_l(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_l$.

Следуя [2, с. 212], l_σ*-длиной* σ-локальной формации $\mathfrak{F}$ назовем число $l_\sigma(\mathfrak{F}) = |\mathfrak{F} : (1)|_\sigma$.

Напомним также понятие прямого разложения формации [2, с. 171]. Пусть $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – некоторый непустой набор подклассов $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}$ такой, что $\mathfrak{F}_{j_1} \cap \mathfrak{F}_{j_2} = (1)$ для любого $j_1 \neq j_2$ из J. Если, кроме того, каждая группа $G \in \mathfrak{F}$ имеет вид $G = A_{j_1} \times \ldots \times A_{j_t}$, где $A_{j_1} \in \mathfrak{F}_{j_1}, \ldots, A_{j_t} \in \mathfrak{F}_{j_t}$ для некоторого $j_1, \ldots, j_t \in J$, то пишут, что $\mathfrak{F} = \oplus_{j\in J}\mathfrak{F}_j$ (в частности, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{F}_t$, если $J = \{1, \ldots, t\}$).

Подформацию $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$ называют *дополняемой* [2, с. 170] в $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$ для некоторой подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$. В этом случае подформацию $\mathfrak{H}$ называют *дополнением* к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$.

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся следующие известные факты теории формаций.

Следующие две леммы являются частными случаями (при $\theta = l_\sigma$) лемм 5.2.8, 5.2.7 [2] соответственно.

Лемма 2.1 [2, лемма 5.2.8]. *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – σ-локальные формации, причем $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$. Тогда если m, r и t – соответственно $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекты формаций $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$, причем $m,\ r < \infty$, то $t \le m + r$.*

Лемма 2.2 [2, лемма 5.2.7] *Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ-локальные формации, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma \le |\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$.*

Частным случаем теоремы 1.15 [39, с. 960] является

Лемма 2.3. *Множество l_σ всех σ-локальных формаций образует полную алгебраическую и модулярную решетку формаций.*

Лемма 2.4 [36, лемма 2.1]. *Пусть Π – непустое подмножество из σ. Тогда $\mathfrak{G}_\Pi$ всех Π-групп и класс $\mathfrak{N}_\Pi$ всех σ-нильпотентных Π-групп являются σ-локальными формациями и справедливы следующие утверждения.*

(1) *$\mathfrak{G}_\Pi = LF_\sigma(g)$, где g – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{G}_\Pi$. При этом, $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $g(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$;*

(2) *$\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$, где n и N, соответственно, наименьшее и каноническое σ-локальные определения формации $\mathfrak{N}_\Pi$. При этом, $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $N(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.*

Лемма 2.5 [44, теорема 3.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *$\mathfrak{F}$ является n-кратно σ-локальной ($n \ge 1$);*

(ii) *$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}^\sigma_{n-1}(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$;*

(iii) *$\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\cup_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{F}^\sigma_{n-1}(\sigma_i))$.*

Лемма 2.6 [44, с. 2372]. *Пусть $\mathfrak{F} = \oplus_{j \in J} \mathfrak{F}_j$, где $\{\mathfrak{F}_j \mid j \in J\}$ – набор таких формаций, что $\sigma(\mathfrak{F}_a) \cap \sigma(\mathfrak{F}_b) = \varnothing$ для любых $a, b \in J$, $a \ne b$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ n-кратно σ-локальна ($n \ge 1$), когда $\mathfrak{F}_j$ является n-кратно σ-локальной формацией для всех j.*

Лемма 2.7 [36, теорема A]. *Пусть $\mathfrak{H}$ – σ-локальная формация классического типа и H – ее каноническое σ-локальное определение. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(G)$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) *$G = P$ – простая σ_i-группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;*

(2) *P – не σ-примарная группа и $P = G^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;*

(3) *$G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ и либо $\Phi(K) = 1$ и $K^{H(\sigma_j)} \subseteq Q$ для всех $\sigma_j \in \sigma(Q)$, либо K – минимальная не $H(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов:*

(*а*) *группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$;*

(*б*) *неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$;*

(*в*) *циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.*

Лемма 2.8 [39, лемма 2.1]. *Пусть f и H – формационые σ-функции и пусть $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. Тогда*:

(1) *$\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;*

(2) *$\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией;*

(3) *если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ-разрешимой, то $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$;*

(4) *если $\sigma_i \in \Pi$, то*
$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F};$$

(5) *$\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, где F – единственная формационная σ-функция, такая что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i.*

Частным случаем теоремы 1.1. работы [43] является следующая

Лемма 2.9 [43, теорема 1.1]. *Пусть $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой набор групп, $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}\mathfrak{X} = LF_\sigma(f)$, где f – наименьшее σ-локальное определение $\mathfrak{F}$. Тогда верны следующие утверждения*:

(1) *$\sigma(\mathfrak{X}) = \sigma(\mathfrak{F})$;*

(2) *$f(\sigma_i) = \mathfrak{X}^\sigma_0(\sigma_i) = \mathfrak{F}^\sigma_0(\sigma_i)$ для всех i;*

(3) *если H – произвольное σ-локальное определение $\mathfrak{F}$, то для всех $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ имеем*
$$f(\sigma_i) = \mathrm{form}(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i}(A) = 1).$$

Лемма 2.10 [43, лемма 3.2]. *Пусть $\sigma_i \in \sigma$, $1 \ne P$ – σ_i-группа, A – группа с $O_{\sigma_i}(A) = 1$ и $G = P \wr A = K \rtimes A$ – регулярное сплетение групп P и A, где K – база сплетения G. Тогда*
$$O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K.$$

Лемма 2.11 является частным случаем леммы 2.6 [39].

***Лемма* 2.11** [39, лемма 2.6]. *Пусть $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form}(\mathfrak{X}) = LF_\sigma(f)$ – σ-локальная формация по-рожденная $\mathfrak{X}$ и $\Pi = \sigma(\mathfrak{X})$. Пусть m – формационная σ-функция, такая, что $m(\sigma_i) = \mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i))$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $m(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Тогда*:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) *m является σ-локальным определением $\mathfrak{F}$; и*

(3) $m(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ *для всех i.*

***Лемма* 2.12** [39, лемма 2.2]. *Если класс групп $\mathfrak{F}_j$ является σ-локальной формацией для всех $j \in J$, то класс $\bigcap_{j\in J} \mathfrak{F}_j$ также является σ-локальной формацией.*

***Лемма* 2.13** [45, следствие 3.7]. *Для любых σ-локальных формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ имеет место решеточный изоморфизм $\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{M} \simeq \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}$.*

***Лемма* 2.14** [2, теорема 4.3.2]. *Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$, то*

$$\mathfrak{F} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{H}\}.$$

3 σ-Локальные формации $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта 1

Элемент *a* решетки *L* называется *нейтральным* (иначе *дистрибутивным*) [49, с. 96], если для любых $b, c \in L$ тройка *a*, *b*, *c* порождает дистрибутивную подрешетку в решетке *L*.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ – σ-локальные формации конечного $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта, где $\mathfrak{H}$ – нейтральный элемент решетки σ-локальных формаций. Тогда для $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта формации $\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}$ имеет место следующее равенство*

$$|\,\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})\,|_\sigma = |\,\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}\,|_\sigma + {}$$
$$+ |\,\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma - |\,\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\,|_\sigma .$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ-локальные формации, удовлетворяющие условию леммы. Положим $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$, $t = |\,\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}\,|_\sigma$, $m = |\,\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}\,|_\sigma$, $k = |\,\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma$ и $l = |\,\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}\,|_\sigma$. Согласно лемме 2.1 имеем $t \le m + k$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}_1 := \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_1 := \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_1 := \mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}_1 := \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{H}$. В силу лемм 2.1 и 2.2 справедливы равенства $|\,\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}_1\,|_\sigma = t$,

$$|\,\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1\,|_\sigma = m, \ \ |\,\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1\,|_\sigma = k$$

и $|\,\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1\,|_\sigma = l$. Поэтому длина решетки $\mathfrak{X}_1 /_\sigma (\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H}$ равна *t*. Заметим также, что формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{F}_1$ являются элементами решетки $\mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H} /_\sigma \mathfrak{H} \simeq \mathfrak{X} /_\sigma \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект является функцией высоты решетки $\mathfrak{X} /_\sigma \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$. Значит, в силу теоремы 16 [49, с. 61] имеет место следующее равенство

$$|\,\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1)\,|_\sigma = |\,\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1\,|_\sigma + {}$$
$$+ |\,\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}_1\,|_\sigma - |\,\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1)\,|_\sigma . \quad (3.1)$$

Поскольку при этом

$$\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \vee_\sigma (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) =$$
$$= (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F}) \vee_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H},$$

то $|\,\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M}_1 \vee_\sigma \mathfrak{F}_1)\,|_\sigma = t$. Кроме того, так как по условию леммы формация $\mathfrak{H}$ является нейтральным элементом решетки σ-локальных формаций, то

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{H}) \cap (\mathfrak{F} \vee_\sigma \mathfrak{H}) =$$
$$= (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) \vee_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{H} = \mathfrak{L}_1.$$

Наконец, поскольку

$$|\,\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1\,|_\sigma = l = |\,\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\,|_\sigma,$$

то из (3.1) получаем

$$|\,\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{F})\,|_\sigma = |\,\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}\,|_\sigma + {}$$
$$+ |\,\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma - |\,\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\,|_\sigma . \quad \square$$

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – такие σ-локальные формации, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M}$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{F}$ конечен, когда конечны $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{F}$, при этом*

$$|\,\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma =$$
$$= |\,\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\,|_\sigma + |\,\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma .$$

Доказательство. Необходимость. Допустим, что $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{F}$ конечен и пусть $|\,\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma = n$. В силу леммы 2.2 имеет место неравенство

$$|\,\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\,|_\sigma \le |\,\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}\,|_\sigma .$$

Поэтому $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ также конечен. Пусть $k = |\,\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})\,|_\sigma$. Согласно определению $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта и в силу леммы 2.3 из модулярности решетки l_σ всех σ-локальных формаций следует, что найдутся такие цепи σ-локальных формаций

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{n-1} \subset \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F},$$
$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) =$$
$$= \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{L}_{k-1} \subset \mathfrak{L}_k = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F},$$

что $\mathfrak{F}_i$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{F}_{i+1}$ и $\mathfrak{L}_j$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{L}_{j+1}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Так как $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 2.3 из модулярности решетки l_σ вытекает, что существует цепь

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{X}_{t-1} \subset \mathfrak{X}_t = \mathfrak{F}$$

σ-локальных формаций длины $t = n - k$ такая, что $\mathfrak{X}_i$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{X}_{i+1}$, $i = 0,1,\ldots,t-1$. Поэтому решетка $\mathfrak{F} /_\sigma \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$ имеет конечную длину, равную *t*. Тогда $t = |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$ по определению $\mathfrak{M}_\sigma$-дефекта.

Достаточность. Пусть

$$k = |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma$$

и $t = |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_\sigma$. Тогда имеем

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{X}_{t-1} \subset \mathfrak{X}_t = \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}) =$$

$$= \mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{L}_{k-1} \subset \mathfrak{L}_k = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F},$$

где $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{L}_j$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{X}_{i+1}$ и $\mathfrak{L}_{j+1}$ соответственно, $i = 0,1,\ldots,t-1$ и $j = 0,1,\ldots,k-1$. Поэтому существует максимальная цепь σ-локальных формаций длины $k + t$ от $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ до $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 2.3 из модулярности решетки l_σ последнее влечет, что $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = k + t$, т. е. имеет место равенство

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma =$$

$$= |\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F})|_\sigma + |\mathfrak{F} : \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}|_\sigma. \quad \square$$

***Лемма* 3.3.** *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– такая σ-локальная формация, что* $(1) \neq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}_\sigma$. *Тогда имеет место равенство* $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, *где* $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{G}_\Pi$ – класс всех П-групп. В силу леммы 2.4(1) формация $\mathfrak{G}_\Pi$ σ-локальна. Поэтому имеет место включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}_\Pi \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_\Pi$.

С другой стороны, ввиду леммы 2.5 (ii) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{H}_0^\sigma(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$. Значит, с учетом леммы 2.6 имеем

$$\mathfrak{N}_\Pi = l_\sigma\mathrm{form}(\cup_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{G}_{\sigma_i}) = \oplus_{\sigma_i \in \Pi}\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Таким образом, $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. □

Если $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация, то формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную σ-локальную подформацию $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{H}_\sigma$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Таким образом, всякая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация является l_σ-неприводимой σ-локальной формацией $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта 1.

***Теорема* 3.4.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– такие σ-локальные формации, что* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной σ-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G)$, *где* G *– монолитическая группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$ *и выполняется одно из условий*:

(1) $G = P$ *– простая* σ_i*-группа для некоторого* $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;

(2) $G = P$ *– такая не σ-примарная простая группа, что* $\sigma(G) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$;

(3) $G = P \rtimes H$, *где* $P = C_G(P)$ *– абелева p-группа для некоторого* $p \in \sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$, *а H – простая* σ_j*-группа,* $j \neq i$. *Кроме того, для всякой группы* $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$, *где A – некоторая простая* σ_i*-группа, K – база регулярного сплетения групп A и H, имеет место равенство* $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(G_1)$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация. В силу леммы 3.3 имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$. По лемме 2.4(2) имеем $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n)$, где n – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{N}_\Pi$, что $n(\sigma_i) = (1)$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $n(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Следовательно, формация $\mathfrak{N}_\Pi$ является σ-локальной формацией классического типа. Пусть H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$. Тогда согласно лемме 2.7 имеем $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}(D)$, где D – такая монолитическая группа с монолитом $R = D^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:

(i) $D = R$ – простая σ_i-группа, $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$;

(ii) R – не σ-примарная группа и $R = D^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$;

(iii) $D = R \rtimes L$, где $R = C_D(R)$ – p-группа, $p \in \sigma_i$, а L – такая монолитическая группа с монолитом $S = L^{H(\sigma_i)}$, что $\sigma_i \notin \sigma(S)$ и либо $\Phi(L) = 1$ и $L^{H(\sigma_j)} \subseteq S$ для всех $\sigma_j \in \sigma(S)$, либо L – минимальная не $H(\sigma_i)$-группа одного из следующих типов: (*a*) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$; (b) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$; (c) циклическая q-группа, $q \notin \sigma_i$.

Если для группы D справедливо условие (i), то, очевидно, группа D удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть для группы выполняется условие (ii). Из леммы 2.4(2) следует, что $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Покажем, что в этом случае $D = R$ и $\sigma(D) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$.

Действительно, поскольку $R = D^{H(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$, то $H(\sigma_i) \neq \varnothing$. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ по лемме 2.8 (5).

С другой стороны, так как $|\sigma(R)| > 1$, то для $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(R)$, где $i \neq j$, имеем

$$D/R \in H(\sigma_i) \cap H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1).$$

Поэтому и в силу монолитичности группы D заключаем, что D – не σ-примарная простая группа такая, что $\sigma(D) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$. Следовательно, группа D удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть, наконец, для группы выполняется условие (iii). Поскольку $S = L^{H(\sigma_i)}$, то $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ и $\Phi(L) = 1$, так как $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – насыщенная формация.

Покажем, что L является простой σ_j-группой, $j \neq i$. Действительно, поскольку $L \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, то $L = S$ является простой σ-примарной группой ввиду монолитичности и σ-нильпотентности группы L. Следовательно, L – σ_j-группа, где $j \neq i$. Значит, группа D удовлетворяет условию (3) теоремы.

Докажем теперь вторую часть утверждения (3) теоремы. Пусть $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$, где A – некоторая простая σ_i-группа, K – база регулярного сплетения групп A и H.

Покажем, что $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G_1)$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = l_\sigma \text{form}(G_1)$, f и f_1 – наименьшие σ-локальные определения формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1$ соответственно. По построению группы G_1 имеем $\sigma(G_1) = \sigma(G)$. Ввиду леммы 2.9 имеем $f(\sigma_s) = \text{form}(G / O_{\sigma_s',\sigma_s}(G))$ для всех $\sigma_s \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_s) = \varnothing$ для всех $\sigma_s \notin \sigma(G)$, а также $f_1(\sigma_s) = \text{form}(G_1 / O_{\sigma_s',\sigma_s}(G_1))$ для всех $\sigma_s \in \sigma(G_1)$ и $f(\sigma_s) = \varnothing$ для всех $\sigma_s \notin \sigma(G_1)$. В силу леммы 2.10 имеем $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = P$ и $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G_1) = O_{\sigma_i}(G_1) = K$.

Следовательно, для всех $\sigma_s \notin \sigma(G)$ имеем $f(\sigma_s) = f_1(\sigma_s) = \varnothing$ и

$$f(\sigma_i) = \text{form}(G / O_{\sigma_i,\sigma_i'}(G)) = \text{form}(H),$$

$$f(\sigma_j) = \text{form}(G / O_{\sigma_j,\sigma_j'}(G)) = (1),$$

$$f_1(\sigma_i) = \text{form}(G_1 / O_{\sigma_i,\sigma_i'}(G_1)) = \text{form}(H),$$

$$f_1(\sigma_j) = \text{form}(G_1 / O_{\sigma_j,\sigma_j'}(G_1)) = (1).$$

Таким образом, $f(\sigma_k) = f_1(\sigma_k)$ для всех $\sigma_k \in \sigma$. Последнее означает, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда если для $\mathfrak{F}$ выполнены условия (1) или (2), то в силу леммы 2.7 (1) (2), соответственно, формация $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией.

Пусть теперь для формации $\mathfrak{F}$ выполнено условие (3). Покажем, что в этом случае для формации $\mathfrak{F}$ выполнены условия леммы 2.7 (3).

Действительно, пусть H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$. Поскольку по лемме 3.3 имеет место равенство $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\Pi$, где $\Pi = \sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 2.4 (2) имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $H(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_j}$. Тогда, очевидно, что $H = H^{H(\sigma_i)}$ – монолитическая группа, $\sigma_i \notin \sigma(H)$ и, кроме того, $\Phi(H) = 1$ и $1 = H^{H(\sigma_j)} \subseteq H$. Следовательно, для группы G выполнены условия (3) леммы 2.7 (3). Поэтому $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией. □

В случае, когда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_\sigma$ – формация всех σ-нильпотентных групп, из теоремы 3.4 получаем

***Следствие* 3.5**. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не σ-нильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G)$ и выполняется одно из следующих условий*: 1) G *– простая не σ-примарная группа*; 2) $G = P \rtimes K$, *где* $P = C_G(P)$ *– p-группа,* $p \in \sigma_i$, *а* K *– простая* σ_j*-группа,* $j \neq i$.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, из теоремы 3.4 имеем

***Следствие* 3.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l\text{form}(G)$, где G – монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$ и выполняется одно из условий*:

(1) $G = P$ *– группа простого порядка* $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

(2) $G = P$ *– такая неабелевая простая группа, что* $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$;

(3) $G = P \rtimes H$, *где* $P = C_G(P)$ *– абелева p-группа для некоторого* $p \in \pi(\mathfrak{H})$, *а* H *– простая q-группа,* $q \neq p$. *Кроме того, для всякой группы* $G_1 = A \wr H = K \rtimes H$, *где* A *– группа простого порядка* p, K *– база регулярного сплетения групп* A *и* H, *имеет место равенство* $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form}(G_1)$.

Кроме того, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, из теоремы 3.4 получаем следующий известный результат.

***Следствие* 3.7.** *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная локальная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l\text{form}(G)$ и выполняется одно из следующих условий*:

(1) G *– группа Шмидта*;

(2) G *– простая неабелевая группа.*

***Теорема* 3.8.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие σ-локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – σ-локальные формации из условия теоремы. Выберем в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{H}$ группу G минимального порядка. Тогда G – монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$. Если при этом $G=P$ – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i\notin\sigma(\mathfrak{H})$ или такая не σ-примарная простая группа, что $\sigma(G)\subseteq\sigma(\mathfrak{H})$, то в силу леммы 3.4 имеем $\mathfrak{L}=l_\sigma\text{form}(G)$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация. Если, кроме того, $G=P$ – такая не σ-примарная простая группа, что $\sigma(G)\not\subseteq\sigma(\mathfrak{H})$, то, поскольку $\sigma(G)\subseteq\sigma(\mathfrak{F})$ и найдется $\sigma_k\in\sigma(G)\setminus\sigma(\mathfrak{H})$, имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_k}\subseteq\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_k}\not\subseteq\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{G}_{\sigma_k}$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь группа G не является простой. Понятно, что $|\sigma(G)|>1$ и $G/P\neq 1$. Пусть $\sigma_j\in\sigma(G/P)$.

Рассмотрим прежде случай когда P не является σ-примарной группой. Пусть $\sigma_i\in\sigma(P)$, где $\sigma_i\neq\sigma_j$. Тогда найдутся такие простые σ_i-группа A и σ_j-группа H, что $A\in\mathfrak{F}$ и $H\in\mathfrak{H}$. Пусть $D=A\wr H=K\rtimes H$, где K – база регулярного сплетения групп A и H. Тогда по лемме 3.4 имеем $\mathfrak{F}=l_\sigma\text{form}(D)$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь группа P является σ-примарной, т. е. σ_i-группой для некоторого i. Тогда, поскольку группа G не является σ-примарной, то найдется $\sigma_k\in\sigma(G/P)$ такое, что $k\neq i$. Поскольку при этом $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{F})$ и $\sigma_k\in\sigma(\mathfrak{H})$, то найдутся простые σ_i-группа $A\in\mathfrak{F}$ и σ_k-группа $H\in\mathfrak{H}$. Пусть $D=A\wr H=K\rtimes H$, где K – база регулярного сплетения групп A и H. Снова, применяя лемму 3.4, получим, что $\mathfrak{F}=l_\sigma\text{form}(D)$ – искомая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$. □

***Следствие* 3.9.** *Пусть $\mathfrak{F}$ не σ-нильпотентная σ-локальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная не σ-нильпотентная σ-локальная подформация.*

В частности, если $\sigma=\sigma^1=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, из теоремы 3.8 получаем следующие известные результаты (см. теорему 2.3.2 [2, с. 72]).

***Следствие* 3.10** [2, с. 72]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие локальные формации, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Если $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, имеем

***Следствие* 3.11** [2, с. 72]. *Пусть $\mathfrak{F}$ ненильпотентная локальная формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная ненильпотентная локальная подформация.*

***Лемма* 3.12.** *Всякая σ-нильпотентная σ-локальная формация является нейтральным элементом решетки l_σ. В частности, формация $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ-нильпотентных групп является нейтральным элементом решетки l_σ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ – некоторые σ-локальные формации, причем формация $\mathfrak{H}$ является σ-нильпотентной. В силу леммы 2.3 и теоремы 12 [49, с. 56] для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что

$$\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})=(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}).$$

Если $\mathfrak{H}=(1)$, то утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{H}\neq(1)$ и $\Pi_1=\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})$ и $\Pi_2=\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})$. Так как $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})=l_\sigma\text{form}((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}))$, то по лемме 2.11 имеем

$$\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}))=\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}))=$$
$$=\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})=\Pi_1\cup\Pi_2.$$

Поскольку $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})\subseteq\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})$, то $\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}))\subseteq\sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M}))$, т. е. $\Pi_1\cup\Pi_2\subseteq\sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M}))$.

С другой стороны, $\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M}=l_\sigma\text{form}(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{M})$ и опять же по лемме 2.11 имеем

$$\sigma(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})=\sigma(\mathfrak{F}\cup\mathfrak{M})=\sigma(\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{M}).$$

Ввиду леммы 2.12 формация $\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})$ σ-локальна. Теперь, если $\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M}))$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\subseteq\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})$ по лемме 2.5 (ii). Поэтому

$$\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{H})\cap\sigma(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})=\sigma(\mathfrak{H})\cap(\sigma(\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{M})).$$

Значит, $\mathfrak{G}_{\sigma_i}\subseteq(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})$. Следовательно,

$$\sigma_i\in\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\cup\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})=\Pi_1\cup\Pi_2.$$

Таким образом,

$$\sigma((\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}))=\sigma(\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})).$$

Так как при этом обе формации

$$(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})\ \text{и}\ \mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})$$

σ-нильпотентны и σ-локальны, то по лемме 3.3 имеем $(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F})\vee_\sigma(\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M})=\mathfrak{N}_\Pi=\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{F}\vee_\sigma\mathfrak{M})$, где $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$. Следовательно, σ-локальные формации $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ образуют дистрибутивную тройку в решетке l_σ и поэтому $\mathfrak{H}$ – нейтральный элемент в l_σ. □

Следующая лемма является прямым следствием лемм 3.1 и 3.12.

***Лемма* 3.13.** *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ – σ-локальные формации конечного $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта, где $\mathfrak{H}$ – σ-нильпотентная σ-локальная формация. Тогда для $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта формации $\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{F}$ имеем*

$$|\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{F})|_\sigma=|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|_\sigma+$$
$$+|\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{F}|_\sigma-|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|_\sigma.$$

В частности, если $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}_\sigma$, то для σ-нильпотентного l_σ-дефекта формации $\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{F}$ имеем

$$|\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{F}:\mathfrak{N}_\sigma\cap(\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{F})|_\sigma=|\mathfrak{M}:\mathfrak{N}_\sigma\cap\mathfrak{M}|_\sigma+$$
$$+|\mathfrak{F}:\mathfrak{N}_\sigma\cap\mathfrak{F}|_\sigma-|\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F}:\mathfrak{N}_\sigma\cap(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{F})|_\sigma.$$

Напомним, что если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ – такие формации, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$. Тогда формацию $\mathfrak{M}$ называют подформацией формации $\mathfrak{H}$ или иначе $\mathfrak{H}$-подформацией.

***Теорема* 3.14.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие σ-локальные формации, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}_\sigma$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен* 1, *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{M}$ – σ-локальная подформация из $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация, при этом*:

(1) *всякая $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})$*;

(2) *всякая σ-локальная подформация $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{X}\not\subseteq\mathfrak{H}$, имеет вид $\mathfrak{L}\vee_\sigma(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация с $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом 1. Так как $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, то по теореме 3.8 в $\mathfrak{F}$ содержится некоторая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{L}$. По условию теоремы $\mathfrak{M}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ – максимальная σ-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{L}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация, а $\mathfrak{M}$ – σ-локальная формация из $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_\sigma$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1 в силу леммы 3.13.

Покажем теперь, что имеют место утверждения (1) и (2). Поскольку $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{L}$, то в силу лемм 2.3 и 2.13 из решеточного изоморфизма

$$\mathfrak{F}/_\sigma(\mathfrak{M}\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}))=$$
$$=(\mathfrak{M}\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})\vee_\sigma\mathfrak{L})/_\sigma(\mathfrak{M}\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}))\simeq$$
$$\simeq\mathfrak{L}/_\sigma(\mathfrak{L}\cap((\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})\vee_\sigma\mathfrak{M}))=$$
$$=\mathfrak{L}/_\sigma((\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}))=\mathfrak{L}/_\sigma\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}$$

получаем, что $\mathfrak{M}\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, то любая $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})\vee_\sigma\mathfrak{M}$. Поэтому имеет место утверждение (1).

Покажем теперь, что в $\mathfrak{F}$ нет отличных от $\mathfrak{L}$ минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций. Допустим, что это неверно и пусть $\mathfrak{L}_1$ – такая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{L}_1\neq\mathfrak{L}$.

Тогда поскольку $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекты формаций $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_1$ равны 1 и, очевидно, $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1\subseteq\mathfrak{H}$, то в силу леммы 2.7 имеем

$$|\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{L}_1)|_\sigma=|\mathfrak{L}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}|_\sigma+$$
$$+|\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}_1|_\sigma-|\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{L}_1)|_\sigma=2.$$

Последнее противоречит лемме 2.2, так как $\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{L}_1\subseteq\mathfrak{F}$. Таким образом, в формации $\mathfrak{F}$ нет минимальных σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, отличных от $\mathfrak{L}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ – произвольная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{X}\not\subseteq\mathfrak{H}$. Тогда в силу доказанного выше и теоремы 3.8 заключаем, что $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{X}$. Так как при этом формация $\mathfrak{X}$ имеет $\mathfrak{H}_\sigma$-дефект равный 1, то $\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{X}$. Поэтому имеет $\mathfrak{X}=\mathfrak{L}\vee_\sigma(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H})$, т. е. справедливо утверждение (2). □

В случае, когда $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}_\sigma$, из теоремы 3.14 получаем

***Следствие* 3.15.** *Пусть $\mathfrak{F}$ не σ-нильпотентная σ-локальная формация. Тогда и только тогда σ-нильпотентный l_σ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен* 1, *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{M}$ – σ-нильпотентная σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{L}$ – минимальная σ-локальная не σ-нильпотентная формация, при этом*:

(1) *всякая σ-нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_\sigma(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})$*;

(2) *всякая σ-нильпотентная σ-локальная подформация $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{L}\vee_\sigma(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H})$.*

В частности, если $\sigma=\sigma^1=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, из теоремы 3.14 получаем

***Следствие* 3.16.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие локальные формации, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}_l$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен* 1, *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{M}$ – локальная подформация из $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ – минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация, при этом*:

(1) *всякая $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_l(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H})$*;

(2) *всякая локальная подформация $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$ такая, что $\mathfrak{X}\not\subseteq\mathfrak{H}$, имеет вид $\mathfrak{L}\vee_l(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H})$.*

Кроме того, если $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, из теоремы 3.14 получаем следующий известный результат.

***Следствие* 3.17** [1, лемма 20.5]. *В точности тогда нильпотентный дефект локальной формации $\mathfrak{F}$ равен* 1, *когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{L}$, где $\mathfrak{M}$ – нильпотентная локальная формация, $\mathfrak{L}$ – минимальная локальная ненильпотентная формация, при этом*:

(1) *всякая нильпотентная подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_l(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{N})$*;

(2) *всякая ненильпотентная локальная подформация $\mathfrak{X}$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{L}\vee_l(\mathfrak{X}\cap\mathfrak{N})$.*

***Теорема* 3.18.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– такие* σ*-локальные формации, что* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$. *Тогда если* $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$, *то следующие условия равносильны*:

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$;

(2) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее* σ*-локальная не* $\mathfrak{H}$*-подформация*;

(3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее* σ*-локальная подформация* $\mathfrak{M}$ *с* $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$.

Доказательство. Пусть имеет место (1) и $\mathfrak{M}$ – σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то по теореме 2.8 имеем $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H})$, где $\mathfrak{L}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация. Пусть $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$, $\Pi_1 = \sigma(\mathfrak{M})$ и $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1$. Покажем, что $\mathfrak{N}_{\Pi_2}$ является дополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$. Понятно, что $\mathfrak{N}_{\Pi_2} \cap \mathfrak{M} = (1)$. Покажем, что $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) = \mathfrak{F}$.

В силу теоремы 2.8 имеем $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. С другой стороны,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \vee_\sigma (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_1},$$

поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}_{\Pi_1}$. Теперь в силу лемм 2.14 и 2.6 имеем

$$\mathrm{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}_{\Pi_2}) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_2} =$$
$$= (\mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_1}) \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi_2} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{N}_{\Pi} = \mathfrak{F}.$$

Таким образом, формация $\mathfrak{N}_{\Pi_2}$ является дополнением к $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$.

Понятно, что если имеет место утверждение (2), то утверждение (3) верно, так как любая σ-локальная подформация $\mathfrak{M}$ с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$ является не $\mathfrak{H}$-подформацией из $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь имеет место (3). Покажем, что выполняется условие (1). По условию теоремы $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому в силу леммы 2.5 в $\mathfrak{F}$ имеется минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{L}$. Ввиду теоремы 2.8 имеет место $|\mathfrak{F}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$.

Значит, по условию теоремы в $\mathfrak{F}$ найдется такая подформация $\mathfrak{M}_1$, что $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1)$ и $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{M}_1)$. Применяя теперь леммы 2.14 и 2.6, получаем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1$ и формация $\mathfrak{M}_1$ σ-локальна.

Допустим, что $\mathfrak{M}_1 \neq (1)$. Тогда если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{M}_1)$, то $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ по условию теоремы. Поэтому и в силу леммы 2.5 (ii) имеют место включения

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{F}_1 = (1).$$

Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_1 = (1)$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_1$. Поэтому $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$. □

***Замечание* 3.19.** Отметим, что условие $\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \sigma(\mathfrak{H})$ в теореме 3.18 опустить нельзя, поскольку наличие дополнения в $\mathfrak{F}$ у каждой ее σ-локальной не $\mathfrak{H}$-подформации, а также наличие дополнения в $\mathfrak{F}$ у каждой σ-локальной подформации $\mathfrak{M}$ из $\mathfrak{F}$ с $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$ не влечет равенства $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$.

Действительно, пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_j} \vee_\sigma \mathfrak{G}_{\sigma_k},$$

где $\sigma_j, \sigma_k \in \sigma \setminus \{\sigma_i\}$, $j \neq k$. Тогда в силу лемм 2.6 и 2.14 имеем $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_j} \oplus \mathfrak{G}_{\sigma_k}$. Ввиду теоремы 3.4 и леммы 3.1 имеем $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 2$. Однако, как нетрудно заметить, всякая σ-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{F}$, а также всякая σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$ с $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом 1, имеют дополнение в $\mathfrak{F}$.

Вместе с тем, имеет место следующее

***Следствие* 3.20.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– не* σ*-нильпотентная* σ*-локальная формация. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{F}|_\sigma = 1$;

(2) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее* σ*-локальная не* σ*-нильпотентная подформация*;

(3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее* σ*-локальная подформация* $\mathfrak{M}$ *с* $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N}_\sigma \cap \mathfrak{M}|_\sigma = 1$.

В частности, если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, из теоремы 3.11 имеем

***Следствие* 3.21.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *и* $\mathfrak{H}$ *– такие локальные формации, что* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}$. *Тогда если* $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$, *то следующие условия равносильны*:

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_l = 1$;

(2) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее локальная не* $\mathfrak{H}$*-подформация*;

(3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее локальная подформация* $\mathfrak{M}$ *с* $|\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_l = 1$.

Кроме того, если $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп из теоремы 3.4 получаем следующий известный результат (см. следствие 5.2.11).

***Следствие* 3.21** [2, с. 197]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– ненильпотентная локальная формация. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) $|\mathfrak{F} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}|_l = 1$;

(2) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее ненильпотентная локальная подформация*;

(3) *в* $\mathfrak{F}$ *дополняема каждая ее локальная подформация* $\mathfrak{M}$ *с* $|\mathfrak{M} : \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}|_l = 1$.

4 Приводимые σ-локальные формации ограниченного $\mathfrak{H}_\sigma$-дефекта

Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация. Формацию $\mathfrak{F}$ мы называется *неприводимой* σ*-локальной* *формацией* (или l_σ *-неприводимой формацией*), если $\mathfrak{F} \neq l_\sigma\text{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i) = \vee_\sigma(\mathfrak{X}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных σ-локальных подформаций из $\mathfrak{F}$. Если же найдутся такие собственные σ-локальные подформации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_\sigma \mathfrak{H}$, то формация $\mathfrak{F}$ называется *приводимой σ-локальной* (или l_σ *-приводимой*) формацией.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема, развивающая наблюдения работ [18], [50], [51].

***Теорема* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие σ-локальные формации, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_\sigma$, и пусть $\mathfrak{F}$ – l_σ -приводима. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{F}$ равен k, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{L}$ – неприводимая σ-локальная формация $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта t, $1 \le t \le k-1$, а $\mathfrak{M}$ – такая σ-локальная формация $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта $k-1$, что $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ является максимальной σ-локальной подформацией формации $\mathfrak{L}$*;

(2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{L}$ – неприводимая σ-локальная формация $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефекта k, $\mathfrak{M}$ – такая σ-локальная формация, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1). Поскольку $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M}$ – единственная максимальная σ-локальная подформация формации $\mathfrak{L}$, то $|\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = t-1$. Значит, в силу леммы 3.13 имеем

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma - $$
$$- |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = t + k - 1 - (t-1) = k.$$

Пусть теперь формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (2). Тогда по лемме 3.13 получим

$$|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = |\mathfrak{L} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}|_\sigma + |\mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}|_\sigma - $$
$$- |\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M} : \mathfrak{H} \cap (\mathfrak{L} \cap \mathfrak{M})|_\sigma = k + 0 - 0 = k.$$

Таким образом, имеет место $|\mathfrak{F} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}|_\sigma = k$.

Необходимость. Доказательство необходимости проведем индукцией по k. Пусть $k = 1$ и $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация с $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом 1. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то по теореме 3.8 в $\mathfrak{F}$ содержится некоторая минимальная σ-локальная не $\mathfrak{H}$ -подформация $\mathfrak{L}$. Поскольку $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$ – максимальная σ-локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{L} \vee_\sigma \mathfrak{M}$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть $k > 1$ и, предположим, что для $k-1$ теорема верна. Обозначим через $\mathfrak{M}$ максимальную σ-локальную подформацию из $\mathfrak{F}$, у которой $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект равен $k-1$.

Допустим, что в формации $\mathfrak{F}$ найдется такая неприводимая σ-локальная подформация $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и $1 \le |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma \le k-1$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\sigma \mathfrak{X}$. Пусть $t = |\mathfrak{X} : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}|_\sigma$. Если $t = 1$, то $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ – единственная максимальная σ-локальная подформация формации $\mathfrak{X}$. В силу максимальности формации $\mathfrak{M}$ имеет место равенство $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{H}$. Значит, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{H}$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть теперь $2 \le t \le k-1$ и любая неприводимая σ-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ с $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефектом меньшим *t* содержится в формации $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{X}_1$ – такая максимальная σ-локальная подформация $\mathfrak{X}$, что $|\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}_1|_\sigma = t-1$. Если $\mathfrak{X}_1$ – l_σ-неприводима, то по предположению $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ – приводимая σ-локальная формация. Поскольку $t-1 < k-1$, то по предположению индукции для формации $\mathfrak{X}_1$ теорема верна. Поэтому формация $\mathfrak{X}_1$ удовлетворяет одному из следующих условий:

(a) $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{L}_1$ – неприводимая σ-локальная формация и $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = s$, $1 \le s \le k-2$, а $\mathfrak{M}_1$ – такая σ-локальная формация, что $|\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}_1|_\sigma = k-2$ и $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{M}_1$ – максимальная σ-локальная подформация формации $\mathfrak{L}_1$;

(b) $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1$, где $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, а $\mathfrak{L}_1$ – такая неприводимая σ-локальная формация, что $|\mathfrak{L}_1 : \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}_1|_\sigma = k-1$ и $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{L}_1$.

Пусть имеет место (b). Тогда по предположению $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{L}_1 \vee_\sigma \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть теперь имеет место (a). Если формация $\mathfrak{M}_1$ является l_σ-неприводимой, то по предположению формации $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{L}_1$ должны содержаться в $\mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1) теоремы.

Если же формация l_σ-приводима, то по индукции для нее теорема верна. Повторяя приведенные выше рассуждения для $\mathfrak{M}_1$ и т.д., через конечное число шагов (поскольку $\mathfrak{H}_\sigma$ -дефект рассматриваемых формаций конечен и строго уменьшается) мы получим, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{X}_1$. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (1) теоремы.

Допустим теперь, что любая неприводимая σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$, имеющая $\mathfrak{H}$-дефект меньший k, содержится в $\mathfrak{M}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ – приводимая σ-локальная формация, то в $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{M}$ найдется группа G такая, что $\mathfrak{L}=l_\sigma\mathrm{form}(G)\neq\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{L}$. Ввиду леммы 2.2 имеем $d=|\mathfrak{L}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{L}|_\sigma\leq k$. Предположим, что $d<k$.

Если $\mathfrak{L}$ – l_σ-неприводима, то по предположению $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{M}$. Что невозможно. Значит, $\mathfrak{L}$ – приводимая σ-локальная формация. Но тогда по индукции для формации $\mathfrak{L}$ теорема верна. Учитывая предположение о неприводимых σ-локальных подформациях, имеющих $\mathfrak{H}_\sigma$-дефект меньший k, и то, что $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}$, снова заключаем, что $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{M}$. Противоречие. Поэтому $d=k$.

Пусть $\mathfrak{D}$ – такая неприводимая σ-локальная подформация из $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{D}\not\subseteq\mathfrak{L}$. По лемме 2.2 имеем $m=|\mathfrak{D}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{D}|_\sigma\leq k$. Ввиду того, что формации $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{D}$ содержатся в $\mathfrak{F}$, имеем $\mathfrak{K}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{F}$, и по лемме 2.2 имеем $d=|\mathfrak{K}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{K}|_\sigma\leq k$.

С другой стороны, по лемме 3.13 имеет место равенство

$$d=k+m-b,\ \text{где } b=|\mathfrak{L}\cap\mathfrak{D}:\mathfrak{H}\cap(\mathfrak{L}\cap\mathfrak{D})|_\sigma .$$

Так как $\mathfrak{D}\not\subseteq\mathfrak{L}$, то $b\leq m-1$. Поэтому $a\geq k+m-(m-1)=k+1$. Противоречие. Таким образом, любая неприводимая σ-локальная подформация из $\mathfrak{M}$ содержится в $\mathfrak{L}$. Значит, если $\mathfrak{M}$ – неприводимая σ-локальная формация, то $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{L}$. Но тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{M}=\mathfrak{L}$, что противоречит определению формации $\mathfrak{L}$. Поэтому формация $\mathfrak{M}$ – l_σ-приводима.

Предположим, что $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Так как $|\mathfrak{M}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{M}|_\sigma=k-1$, то по индукции для формации $\mathfrak{M}$ теорема верна. Поэтому формацию $\mathfrak{M}$ можно представить в виде (a) или (b). Учитывая, что любая неприводимая σ-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация из $\mathfrak{M}$ содержится в $\mathfrak{L}$, получаем, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{L}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}\subset\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}\not\subseteq\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ – неприводимая σ-локальная формация. Тогда, используя представление формации $\mathfrak{M}$ в виде (a) или (b) и учитывая, что любая неприводимая σ-локальная формация с $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом меньшим k содержится в $\mathfrak{L}$, получим, что $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H})$. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{L}$ – приводимая σ-локальная формация. Тогда, так как $\mathfrak{L}\not\subseteq\mathfrak{M}$, то по теореме 3.8 в $\mathfrak{L}$ содержится по меньшей мере одна $\mathfrak{M}_\sigma$-критическая формация $\mathfrak{X}$. Поскольку любая неприводимая σ-локальная формация с $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом меньшим k содержится в формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}=\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$, то $|\mathfrak{X}:\mathfrak{H}\cap\mathfrak{X}|_\sigma=k$. Заметим также, что любая неприводимая σ-локальная формация из $\mathfrak{L}$ с $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом меньшим k содержится в $\mathfrak{X}$, поскольку в противном случае формация $\mathfrak{F}$ будет содержать l_σ-подформацию с $\mathfrak{H}_\sigma$-дефектом большим k, что невозможно ввиду леммы 2.1. В силу максимальности формации $\mathfrak{M}$ имеем $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{X}$. Поскольку $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}\not\subseteq\mathfrak{L}\cap\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H}\not\subseteq\mathfrak{X}\cap\mathfrak{H}$. Поэтому, учитывая представление формации $\mathfrak{M}$ в виде (a) или (b), имеем $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_\sigma\mathfrak{X}=\mathfrak{X}\vee_\sigma(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{H})$.

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию (2) теоремы. □

В случае, когда $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}_\sigma$, мы получаем следующий специальный случай теоремы 4.1.

***Следствие* 4.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая σ-локальная формация. Тогда и только тогда σ-нильпотентный l_σ-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен k, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{L}$ – неприводимая σ-локальная формация σ-нильпотентного l_σ-дефекта t, $1\leq t\leq k-1$, а $\mathfrak{M}$ – такая σ-локальная формация σ-нильпотентного l_σ-дефекта $k-1$, что $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}$ является максимальной σ-локальной подформацией формации $\mathfrak{L}$*;

(2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{L}$ – неприводимая σ-локальная формация σ-нильпотентного l_σ-дефекта k, $\mathfrak{M}$ – такая σ-локальная формация, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{L}$.*

В частности, если $\sigma=\sigma^1=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ из теоремы 4.1 получаем

***Следствие* 4.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – такие локальные формации, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}$, и пусть $\mathfrak{F}$ – приводима. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}_l$-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен k, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_l\mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{L}$ – неприводимая локальная формация $\mathfrak{H}_l$-дефекта t, $1\leq t\leq k-1$, а $\mathfrak{M}$ – такая локальная формация $\mathfrak{H}_l$-дефекта $k-1$, что $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией формации $\mathfrak{L}$*;

(2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_l\mathfrak{M}$, *где $\mathfrak{L}$ – неприводимая локальная формация $\mathfrak{H}_l$-дефекта k, $\mathfrak{M}$ – такая локальная формация, что $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M}\not\subseteq\mathfrak{L}$.*

Кроме того, если $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп, из теоремы 4.1 получаем следующий известный результат.

***Следствие* 4.4** [18]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая локальная формация. Тогда и только тогда нильпотентный l-дефект формации $\mathfrak{F}$ равен k, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_l\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{L}$ *– неприводимая локальная формация нильпотентного l-дефекта t*, $1\le t\le k-1$, *а* $\mathfrak{M}$ *– такая локальная формация нильпотентного l-дефекта* $k-1$, *что* $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}$ *является максимальной локальной подформацией формации* $\mathfrak{L}$;

(2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_l\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{L}$ *– неприводимая локальная формация нильпотентного l-дефекта k*, $\mathfrak{M}$ *– такая локальная формация, что* $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}\nsubseteq\mathfrak{L}$.

Кроме того, в случае, когда $\mathfrak{H}=(1)$, из теоремы 4.1 получаем следующий результат

***Теорема* 4.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая σ-локальная формация. Тогда и только тогда l_σ-длина формации $\mathfrak{F}$ равна k, когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{L}$ *– неприводимая σ-локальная формация l_σ-длины t*, $1\le t\le k-1$, *а* $\mathfrak{M}$ *– такая σ-локальная формация l_σ-длины* $k-1$, *что* $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}$ *является максимальной σ-локальной подформацией формации* $\mathfrak{L}$;

(2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{L}$ *– неприводимая σ-локальная формация l_σ-длины k*, $\mathfrak{M}$ *– такая σ-локальная формация*, *что* $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}\nsubseteq\mathfrak{L}$.

В частности, если $\sigma=\sigma^1=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, из теоремы 4.5 имеем

***Следствие* 4.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – приводимая локальная формация. Тогда и только тогда l-длина формации $\mathfrak{F}$ равна k*, *когда $\mathfrak{F}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

(1) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_l\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{L}$ *– неприводимая локальная формация l-длины t*, $1\le t\le k-1$, *а* $\mathfrak{M}$ *– такая локальная формация l-длины* $k-1$, *что* $\mathfrak{L}\cap\mathfrak{M}$ *является максимальной локальной подформацией формации* $\mathfrak{L}$;

(2) $\mathfrak{F}=\mathfrak{L}\vee_\sigma\mathfrak{M}$, *где* $\mathfrak{L}$ *– неприводимая локальная формация l-длины k*, $\mathfrak{M}$ *– такая локальная формация, что* $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{M}\nsubseteq\mathfrak{L}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989. – 255 с.

2. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Минск: Беларуская навука, 1997. – 240 с.

3. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

4. *Skiba*, *A.N.* On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.

5. *Скиба*, *А.Н.* О локальных формациях длины 5 / А.Н. Скиба // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп: труды Гомельского семинара; под ред. канд. физ.-мат. наук М.И. Салука. – Минск: Наука и техника. – 1986. – С. 135–149.

6. *Скиба*, *А.Н.* Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Математические заметки. – 1987. – Т. 41, № 4. – С. 490–499.

7. *Скиба*, *А.Н.* О локальных формациях с ограниченным *p*-разложимым дефектом / А.Н. Скиба // Известия вузов. Серия Математика. – 1991. – № 4. – С. 63–69.

8. *Аниськов*, *В.В.* Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с *p*-нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1. – 1995. – № 2. – С. 66–69.

9. *Аниськов*, *В.В.* О неприводимых *p*-разрешимых локальных формациях с π-разложимым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Вопросы алгебры. – 1995. – № 8. – С. 11–21.

10. *Сафонов*, *В.Г.* О кратно локальных формациях с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 112–127.

11. *Сафонов*, *В.Г.* О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1996. – № 3. – С. 8–12.

12. *Аниськов*, *В.В.* О приводимых локальных формациях с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом / В.В. Аниськов // Весці АН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 65–68.

13. *Аниськов*, *В.В.* Разрешимые локальные формации с π-нильпотентным дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 1999. – № 1 (15). – С. 60–63.

14. *Сафонов*, *В.Г.* О неразрешимых насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2004. – № 4 (25). – С. 142–147.

15. *Аниськов*, *В.В.* О локальных формациях с *p*-замкнутым дефектом 2 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 6 (51). – С. 137–140.

16. *Аниськов*, *В.В*. Разрешимые приводимые локальные формации p-разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2009. – № 5 (56). – С. 91–94.

17. *Аниськов*, *В.В*. О неприводимых разрешимых локальных формациях p-разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 16–21.

18. *Сафонов*, *В.Г.* О кратно локальных формациях конечных групп с ограниченным нильпотентным дефектом / В.Г. Сафонов // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 161–175.

19. *Сафонов*, *В.Г.* О кратно насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2005. – № 3 (37). – С. 105–109.

20. *Сафонов*, *В.Г.* О приводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 4 (31). – С. 157–162.

21. *Сафонов*, *В.Г.* О неприводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 3 (36). – С. 131–136.

22. *Сафонов*, *В.Г.* Тотально насыщенные формации с метанильпотентным l_∞ -дефектом 3 / В.Г. Сафонов // Весці НАН Беларусі. Серыя фізмат. навук. – 2007. – № 4. – С. 40–46.

23. Сафонов, В.Г. О приводимых ω-насыщенных формациях с разрешимым дефектом ≤ 2 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 162–165.

24. *Рябченко*, *А.И.* Частично насыщенные формации с π-специальным дефектом 1 / А.И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2006. – № 5 (37). – С. 59–68.

25. *Сафонов*, *В.Г.* О n-кратно ω-насыщенных формациях с максимальной разрешимой подформацией / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Вестник Гродненского гос. университета. Серия Математика. – 2008. – № 2. – С. 53–57.

26. *Сафонов*, *В.Г.* О τ-замкнутых ω-насыщенных формациях разрешимого l_τ^ω -дефекта 1 / В.Г. Сафонов, И.Н. Сафонова // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2008. – № 2 (48). – С. 120–125.

27. *Рябченко*, *А.И.* О частично насыщенных формациях с $\mathfrak{X}$ -дефектом 1 / А.И. Рябченко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 28–34.

28. *Рябченко*, *А.И.* О частично насыщенной формации с максимальной подформацией классического типа / А.И. Рябченко // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 5 (50). – С. 216–222.

29. *Шеметков*, *Л.А*. Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.

30. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.

31. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физ.-мат. наук. – 1981. – № 3. – С. 33–38.

32. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Доклады АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780–782.

33. *Скиба*, *А.Н.* Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А.Н. Скиба // Группы и др. алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск. Наука. – 1984. – Т. 4. – С. 101–118.

34. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин–т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.

35. *Сафонова*, *И.Н.* О минимальных σ-локальных не-$\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.

36. *Сафонова*, *И.Н.* О критических σ-локальных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.

37. *Chi*, *Z.* On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – С. 85–88.

38. Zhang, Ch. On Σ_t^σ -closed classes of finite groups / Ch. Zhang, Z. Chi, A.N. Skiba // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70 (2). – P. 1707–1716.

39. Chi, Z. On n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47 (3). – P. 957–968.

40. *Tsarev*, *A*. Laws of the lattices of σ-local formations of finite groups / A. Tsarev // Mediterranean Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Article: 75.

41. *Safonova*, *I.N.* On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. – 2020. – № 3. – P. 1–14.

42. *Воробьев*, *Н.Н.* Отделимые решетки кратно σ-локальных формаций / Н.Н. Воробьев, И.И. Стаселько, А.О. Ходжагулыев // Сибирский математический журнал. – 2021. – Т. 62, № 4. – С. 721–735.

43. *Safonova*, *I.N.* Some properties of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – 2250138 (12 pages).

44. *Safonova*, *I.N.* A criterion for σ-locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2022. – Vol. 50, № 6. – P. 2366–2376.

45. *Safonova*, *I.N.* On properties of the lattice of all τ-closed *n*-multiply σ-local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2023. – Vol. 51, № 10. – P. 4454–4461.

46. *Safonova*, *I.N.* On σ-inductive lattices of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova // Journal of Algebra and Its Applications. – 2024. – Vol. 23, № 1. – 2450017 (13 p).

47. *Safonova*, *I.N.* On the τ-closedness of *n*-multiply σ-local formation / I.N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.

48. *Safonova*, *I.N.* On separability of the lattice of τ-closed *n*-multiply σ-local formations / I.N. Safonova // Communications in Algebra. – 2024. – Vol. 52, № 2. – P. 3309–3318.

49. *Биркгоф*, *Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.

50. *Safonov*, *V.G.* On reducible partially saturated formations with limited soluble defect / V.G. Safonov, I.N. Safonova // 5 Международная алгебраическая конференция в Украине: тезисы докладов, Одесса, 20-27 июля 2005 г. – Одесса: Изд-во Одесского ун-та, 2004. – С. 176.

51. *Safonova*, *I.N.* On totally ω-composition formations with limited soluble c_∞^ω -defect / I.N. Safonova // The 9th International Algebraic Conference in Ukraine, L'viv, July 8-13 2013. – L'viv Ukraine, 2013. – P. 162.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (*проект* 20211328).

Поступила в редакцию 14.01.2025.

Информация об авторах
Сафонова Инна Николаевна – к.ф.-м.н., доцент
Скрундь Валентина Викторовна – аспирант