Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 517.949.8 *МАТЕМАТИКА*

С. И. СЕРДЮКОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕК СПЕКТРА НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 1 III 1971)

Следуя [1], рассмотрим явную разностную аппроксимацию гиперболической системы дифференциальных уравнений

$$\partial u / \partial t = A\, \partial u / \partial x, \quad x \geqslant 0, \quad t \geqslant 0; \tag{1}$$

A — постоянная матрица размерности (k, k), u — вектор-функция размерности k. Без ограничения общности можно считать, что A — диагональная матрица.

Предположение 1. A — невырожденная матрица, неизвестные $u^{(\nu)}$ упорядочены так, что A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & A^{\mathrm{II}} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_l \end{pmatrix}, \quad A^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} a_{l+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{l+2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_k \end{pmatrix}; \tag{2}$$

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_l < 0 < a_{l+1} \leqslant \ldots \leqslant a_k.$$

Решается смешанная краевая задача: заданы начальные данные $u(x, 0) = f(x)$, $x \geqslant 0$ и кревые условия

$$u^{\mathrm{I}}(0, t) = \mathrm{S}u^{\mathrm{II}}(0, t), \quad t \geqslant 0.$$

Векторы u^{I}, u^{II} определены согласно разбиению A, S — прямоугольная постоянная матрица размерности $(l, k-l)$. Рассматривается равномерная сетка с шагами τ, h, отношение $\lambda = \tau / h$ фиксировано. В узлах сетки (1) заменяется согласованной разностной аппроксимацией

$$v_\nu(t+\tau) = \sum_{j=-r}^{p} A_j v_{\nu+j}(t), \quad v_\nu(0) = f_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Здесь A_j — постоянные матрицы размерности (k, k).

Предположение 2. $p \geqslant 1$, A_p, A_{-r} невырожденные.

Обозначим через $G(\xi)$ характеристическую матрицу (3):

$$Q(\xi) = \sum_{j=-r}^{p} A_j e^{ij\xi}, \quad -\pi \leqslant \xi \leqslant \pi.$$

Предположение 3. Аппроксимация (3) диссипативная: существуют постоянная $\delta > 0$ и натуральное $2s > 0$ такие, что собственные значения (с.з.) $Q(\xi)$ удовлетворяют оценке

$$|\mu(\xi)| \leqslant 1 - \delta|\xi|^{2s}, \quad -\pi \leqslant \xi \leqslant \pi.$$

Предположение 4. Соответствующая (3) задача Коши устойчива.

Рассматриваются однородные краевые условия вида

$$v_\mu(t) = \sum_{j=1}^{s} C_{j\mu} v_j(t), \quad \mu = 0, -1, \ldots, -r+1. \tag{4}$$

Здесь $C_{j\mu}$ — постоянные матрицы размерности (k, k). Обозначим через $\mathscr{H}$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом последовательностей, удовлетворяющих (4):

$$v = \{v_{-r+1}, \ldots, v_0, v_1, \ldots\}, \quad \|v\|^2 = \sum_1^\infty |v_\nu|^2.$$

Разностная аппроксимация устойчива, если существует постоянная K, не зависящая от τ, такая, что

$$\|v(t)\| \leqslant K\|v(0)\|$$

для всех $t = n\tau$ и всех $v(0) \subset \mathscr{H}$.

Разностную аппроксимацию (3), (4) запишем в операторном виде

$$v(t+\tau) = Gv(t), \; v(t), \; v(t+\tau) \subset \mathscr{H}. \tag{5}$$

Для того чтобы разностная аппроксимация была устойчива, необходимо ([1]), чтобы оператор G не имел точек спектра вне единичного круга. Обозначим через $\mathscr{D}$ множество точек $|z| \geqslant 1$, $z \neq 1$. Крайс доказывает устойчивость (5) при условии, что G не имеет точек спектра в $\mathscr{D}$ и $z = 1$ не является «обобщенной точкой» спектра. (z_0 — точка спектра оператора G, если существует $v \neq 0$, $v \subset \mathscr{H}$, такая, что $Gv = z_0 v$. Определение «обобщенной точки» спектра в ([1]).)

В предлагаемой работе решается вопрос об устойчивости (5) в случае, когда $z = 1$ является точкой спектра (или обобщенной точкой спектра) оператора G.

Для того чтобы исследовать устойчивость (5), достаточно оценить порядок роста норм степеней оператора G. Если $\|G^n\|$ ограничены равномерно по n, то аппроксимация (5) устойчива. Если $\|G^n\|$ растет с ростом n, то порядок роста $\|G^n\|$ характеризует степень неустойчивости (5).

Следуя ([1]), представим G^n в виде контурного интеграла от резольвенты:

$$G^n = -\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma z^n (G - zI)^{-1}\, dz. \tag{6}$$

Здесь $\Gamma = \{|z-1| = \rho \cap |z| \geqslant 1-\varepsilon\} \cup \{|z| = 1-\varepsilon \cap |z-1| \geqslant \rho\} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (см. ([1])). Если выполняются предположения 1—4 и G не имеет точек спектра в $\mathscr{D}$, то интеграл по Γ_2 экспоненциально убывает с ростом n. Оценку интеграла по Γ_1 получим с помощью явного представления резольвенты для z, близких к 1. Чтобы получить такое представление, необходимо выписать в явном виде решение системы разностных уравнений

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j f_{\nu+j} - z f_\nu = v_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \quad f_\mu = \sum_{j=1}^{s} C_{j\mu} f_j,$$
$$\mu = 0, -1, \ldots, -r+1, \quad f \subset \mathscr{H}.$$

После замены $y_\nu = (f_{\nu+p-1}, \ldots, f_{\nu+r})$ получаем одношаговую формулу $y_{\nu+1} = My_\nu + g_\nu$,

$$M = \begin{pmatrix} -A_p^{-1}A_{p-1} & -A_p^{-1}A_{p-2} & \ldots & -A_p^{-1}(A_0 - zI) & \ldots & - & A_p^{-1}A_{-r} \\ I & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & I & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_\nu = \begin{pmatrix} A_p^{-1}v_\nu \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Краевые условия могут быть записаны в виде

$$[0I]\, y_1 = \sum_{l=r}^{s} [0C_l]\, y_{l+1},$$

$$C_r = \begin{bmatrix} C_{r,0} & \dots & C_{1,0} \\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ C_{r,-r+1} & \dots & C_{1,-r+1} \end{bmatrix}, \quad C_{r+1} = \begin{bmatrix} C_{r+1,0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ C_{r+1,-r+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots,$$

$$C_s = \begin{bmatrix} C_{s,0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ C_{s,-r+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Для z, близких к 1, с.з. M разбиваются на 4 класса: $(kr-l)$ с.з. находятся внутри единичного круга (K_1), эти собственные значения отнесем к классу S_1; k с.з. стремится к 1 при $z \to 1$. Эти собственные значения устроены так:

$$\varkappa_j = 1 + (\lambda a_j)^{-1}(z-1) + O((z-1)^{1+1/k}), \quad j = 1, \dots, k. \tag{8}$$

Здесь a_j — диагональные элементы исходной непрерывной задачи (2). При $|z| > 1$ первые l из числа рассматриваемых с.з. находятся в K_1, эти с.з. отнесем к S_2, остальные $(k-l)$ с.з. составляют S_3, наконец, $(pk - k + l)$ с.з. лежат вне K_1 и остаются вне K_1 при $z = 1$. Эти с.з. принадлежат классу S_4.

Лемма (H.-O. Kreiss ([1])). *Существует постоянная ρ и несингулярная аналитическая в круге $|z-1| \leqslant \rho$ матрица $T(z)$ такая, что*

$$T(z)\, M(z)\, T^{-1}(z) = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_4 \end{pmatrix} = \overline{M}(z).$$

Блокам M_1, M_2, M_3, M_4 отвечают классы с.з. S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно.

После замены $w_\nu = Ty_\nu$ уравнение $y_{\nu+1} = My_\nu + g_\nu$ принимает вид

$$w_{\nu+1} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{pmatrix} w_\nu + Tg_\nu.$$

Его общее (в $\mathscr{H}$) решение дается формулами

$$w_j^{\mathrm{I}} = \sum_{\nu=1}^{j-1} M_{11}^{j-\nu-1} (Tg_\nu)^{\mathrm{I}} + M_{11}^{j-1} w_1^{\mathrm{I}}, \quad w_j^{\mathrm{II}} = -\sum_{\nu=j}^{\infty} M_{22}^{j-\nu-1} (Tg_\nu)^{\mathrm{II}}.$$

Векторы w_j^{I}, w_j^{II} определены согласно разбиению $\overline{M}$ на блоки; w_1^{I} определяется из краевых условий, которые после замены переменных преобразуются к виду

$$K_1(z)\, w_1^{\mathrm{I}} = K_2(z)\, w_1^{\mathrm{II}} + \sum_{\nu=1}^{s} (B_\nu^{\mathrm{I}}(z)\, (Tg_\nu)^{\mathrm{I}} + B_\nu^{\mathrm{II}}(z)\, (Tg_\nu)^{\mathrm{II}}).$$

Здесь K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II} — аналитические в $|z-1| \leqslant \rho$ матрицы:

$$K_1(z) = T_{21}^{-} - \sum_{\nu=r}^{s} C_\nu T_{21}^{-} M_{11}^{\nu}, \quad B_\nu^{\mathrm{I}} = \sum_{l=\max(r,\nu)}^{s} C_\nu T_{21}^{-} M_{11}^{l-\nu},$$

$$K_2(z) = -\left(T_{22}^{-} - \sum_{\nu=r}^{s} C_\nu T_{22}^{-} M_{22}^{\nu}\right), \quad B_\nu^{\mathrm{II}} = \sum_{l=\max(r,\nu)}^{s} C_\nu T_{22}^{-} M_{22}^{l-\nu}.$$

Матрица $T^{-1}(z)$ разбита на блоки следующим образом:

$$T^{-1}(z) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} T_{11}^{-} & T_{12}^{-} \\ T_{21}^{-} & T_{22}^{-} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} pk \\ rk. \end{array} \\ \begin{array}{cc} rk & pk \end{array} & \end{array}$$

Крайс предполагает, что $z = 1$ не является обобщенной точкой спектра, тогда $K_1^{-1}(z)$ определена в окрестности $z = 1$ и w_1^{I} является линейной комбинацией w_1^{II}, $(Tg_\nu)^{\mathrm{I}}$, $(Tg_\nu)^{\mathrm{II}}$, $\nu = 1, \ldots, s$, с аналитическими коэффициентами. Мы рассматриваем случай сингулярной $K_1^{-1}(z)$. Для такого случая удалось получить необходимое и достаточное условие устойчивости (3), (4) в L_2.

Замечание. В ([4]) получено достаточное условие устойчивости при некоторых требованиях на разностную аппроксимацию, одним из которых является так называемое требование «разделенности нулей». В нашей работе такого требования нет.

Основная теорема. *Пусть выполняются предположения* 1—4 *и пусть G не имеет точек спектра в $\mathcal{D}(|z| \geq 1, z \neq 1)$.*

Тогда для того чтобы аппроксимация (3), (4) *была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *матрица K_1^{-1} не должна иметь особенностей при $z = 1$ в нижних l строках и не должна иметь особенностей выше первого порядка в остальных строках;*

2) *матрица $K_1^{-1}K_2$ не должна иметь особенностей при $z = 1$ в первых $k - l$ столбцах.*

При нарушении условия 1) нижними l строками имеет место неустойчивость порядка не ниже $n^{q-1/2}$, где q — максимальный порядок особенностей элементов нижних l строк $K_1^{-1}(z)$. Если элементы верхних $kr - l$ строк имеют особенности выше первого и максимальный порядок особенностей равен q, то имеет место неустойчивость порядка не ниже n^{q-1}. Если 1) выполнено, а 2) нарушается, то имеет место неустойчивость порядка не ниже чем $\sqrt{n}$.

Алгоритм построения $T(z)$. Пусть известны с.з. $M(1)$. Построим (см., например, ([5])) ряды по степеням $(z-1)^{1/m}$, представляющие с.з. для z, близких к 1. Многочлен $\det(M(z) - \lambda)$ может быть представлен в виде произведения четырех многочленов с аналитическими по z коэффициентами:

$$\det(M(z) - \lambda) = D_1 D_2 D_3 D_4.$$

Многочлену $D_i(\lambda, z)$ отвечают с.з. класса S_i. Обозначим через n_i размерность соответствующего собственного подпространства (с.п.). Столбцы матрицы $D_i(M(z), z)$ содержат базис ортогонального дополнения к рассматриваемому с.п. Чтобы выделить этот базис, положим $z = 1$. Среди столбцов $D_i(M)(1), 1)$ есть ровно $(p + r)k - n_i$ линейно независимых. По непрерывности соответствующие столбцы матрицы $D_i(M(z), z)$ дают аналитический базис в окрестности $z = 1$. Имея аналитический базис ортогонального дополнения, нетрудно построить аналитический базис самого с.п. Базисы с.п. берем в качестве столбцов матрицы $T^{-1}(z)$.

Объединенный институт ядерных исследований
Дубна

Поступило
25 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H.-O. Kreiss. Stability Theory of Difference Approximations of Mixed Initial Boundary Value Problems. 1, Mathematics of Computation, 22, № 104, 1968, p. 703. [2] S. Osher. Trans. Am. Math. Soc., 137, 177 (1969). [3] H.-O. Kreiss, Math. Scand., 7, 71 (1959). [4] В. Я. Урм, ДАН, 139, № 1, 40 (1961). [5] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 8, 1950.