Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ

О СХОДИМОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В РАВНОМЕРНОЙ ТОПОЛОГИИ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 4 III 1971)

Результаты, полученные в работе, в частном случае сходимости к винеровскому процессу аналогичны приведенным в работе ([1]).

Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$,— случайный процесс, траектории которого с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа, $\varkappa_\varepsilon(k)$, $k = 1, 2, \ldots,$— последовательность неотрицательных с вероятностью 1 случайных величин и

$$\tau_\varepsilon(k) = \sum_{r=1}^{k} \varkappa_\varepsilon(r)^*, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\gamma_\varepsilon(k) = \xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(k)) - \xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(k-1)), \quad k \geqslant 1, \quad \gamma_\varepsilon(0) = \xi_\varepsilon(0),$$

$$\pi_\varepsilon(k) = \sup_{t \in (\tau_\varepsilon(k-1),\, \tau_\varepsilon(k)]} |\xi_\varepsilon(t) - \xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon(k-1))|, \quad k \geqslant 1.$$

T_ε, $u(\varepsilon)$, $v(\varepsilon)$ — неслучайные функции такие, что T_ε, $u(\varepsilon)$, $v(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть также D_T — пространство функций на $[0, T]$ без разрывов второго рода, непрерывных справа, и для каждой функции $x(t) \in D_T$

$$\Delta_c(x(t), T) = \sup_{|s'-s''| \leqslant c,\ s', s'' \in [0, T]} |x(s') - x(s'')|.$$

Через $R_{\zeta(s), T}$ будем обозначать пространство измеримых функционалов на D_T, непрерывных в равномерной топологии почти всюду по мере, соответствующей случайному процессу $\zeta(s)$, $s \in [0, T]$ ([2]).

Будем предполагать выполненными условия:

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]} \left(\frac{\varkappa_\varepsilon(k)}{T_\varepsilon}, \frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}\right)$, $t \geqslant 0, \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (\varkappa(t), \gamma(t))$, $t \geqslant 0$, при $\varepsilon \to 0$ **,

где предельный случайный процесс $(\varkappa(t), \gamma(t))$, $t \geqslant 0$, удовлетворяет условиям

а) процесс $\gamma(t)$, $t \geqslant 0$, непрерывен с вероятностью 1,

б) $P\{\varkappa(t) \leqslant s\} \to 0$ при $t \to \infty$ для всех $s \geqslant 0$ и случайный процесс

$$\nu(t) = \sup (s\colon \varkappa(s) \leqslant t), \quad t \geqslant 0,$$

непрерывен с вероятностью 1 (для чего необходимо и достаточно, чтобы случайный процесс $\varkappa(t)$, $t \geqslant 0$, был строго монотонно возрастающим с вероятностью 1);

B) $\displaystyle\lim_{c\to 0} \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} P\left\{\Delta_c\left(\sum_{k=0}^{[tv(\varepsilon)]} \frac{\gamma_\varepsilon(k)}{u(\varepsilon)}, T\right) > \delta\right\} = 0, \quad T, \delta > 0;$

C) $\displaystyle\sum_{k=1}^{[Tv(\varepsilon)]} P\{\pi_\varepsilon(k) \geqslant (\varepsilon)\delta\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0, T, \delta > 0.$

---

* Здесь и ниже $\displaystyle\sum_{k=1}^{0} = 0.$

** Символ $\zeta_\varepsilon(s)$, $s \in S \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \zeta_{\varepsilon'}(s)$, $s \in S$, при $\varepsilon \to \varepsilon'$ означает слабую сходимость (в точках непрерывности) всех конечномерных распределений случайных процессов $\zeta_\varepsilon(s)$, $s \in S$, и $\zeta_{\varepsilon'}(s)$, $s \in S$, при $\varepsilon \to \varepsilon'$.

Условие A) является, по существу, требованием существования для случайного процесса $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, последовательности «моментов восстановления» таких, что совместные распределения двумерного ступенчатого процесса, построенного по моментам восстановления и значениям процесса $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, в моменты восстановления, сходятся слабо (в точках непрерывности) к соответствующим конечномерным распределениям некоторого непрерывного процесса $(\varkappa(t), \gamma(t))$, $t \geqslant 0$. Условие B) вместе с условием A), a) обеспечивают слабую сходимость распределения функционалов, непрерывных в равномерной топологии, почти всюду по мере соответствующей случайному процессу $\gamma(t)$, $t \in [0, T]$, от ступенчатого процесса $u(\varepsilon)^{-1}\xi_\varepsilon(\tau_\varepsilon([tv(\varepsilon)]))$, $t \in [0, T]$, и случайного процесса $\gamma(t)$, $t \in [0, T]$. Условие C) «запрещает» слишком большие выбросы траекторий случайного процесса $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, между моментами восстановления.

Теорема. *Если выполняются условия* A), B) *и* C), *то для любого функционала* $f(\cdot) \in R_{\gamma(\nu(t)),\,T}$, $T > 0$,

$$f(\xi_\varepsilon(tT_\varepsilon)/u(\varepsilon)) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(\gamma(t)) \qquad \text{при } \varepsilon \to 0$$

и, в частности,

$$\xi_\varepsilon(tT_\varepsilon)/u(\varepsilon), \quad t \in [0, T], \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \gamma(\nu(t)), t \in [0, T], \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Для доказательства теоремы существенно используются результаты 3.1.2 и 3.2.1 из ([2]) и следующее вспомогательное утверждение, представляющее, как нам кажется, некоторый самостоятельный интерес.

Лемма. *Пусть для каждого* $\varepsilon > 0$ $\xi_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, *и* $\nu_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, — *случайные процессы, траектории которых с вероятностью* 1 *не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа, причем* $\nu_\varepsilon(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, *с вероятностью* 1.

Тогда, если выполняется условие

D) 1) $(\xi_\varepsilon(t), \nu_\varepsilon(t)), t \geqslant 0, \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} (\xi_0(t), \nu_0(t)), t \geqslant 0,$ *при* $\varepsilon \to 0$,

где $(\xi_0(t), \nu_0(t))$, $t \geqslant 0$, — *непрерывный с вероятностью* 1 *случайный процесс,*

2) $\lim\limits_{c \to 0} \overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} P\{\Delta_c(\xi_\varepsilon(t), T') \geqslant \delta\} = 0, \quad T', \delta > 0,$

3) $\lim\limits_{c \to 0} \overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} P\{\Delta_c(\nu_\varepsilon(t), T) \geqslant \delta\} = 0, \quad \delta > 0,$

то

a) $\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(t)), t \in [0, T], \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_0(\nu_0(t)), t \in [0, T],$ *при* $\varepsilon \to 0$,

б) $\lim\limits_{c \to 0} \overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}} P\{\Delta_c(\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(t)), T) \geqslant \delta\} = 0, \quad \delta > 0,$

и, следовательно (*см.* 3.2.1 ([2])) *для любого функционала* $f(\cdot) \in R_{\xi_0(\nu_0(t)),\,T}$

$$f(\xi_\varepsilon(\nu_\varepsilon(t))) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(\xi_0(\nu_0(t))) \quad \textit{при } \varepsilon \to 0.$$

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
16 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Боровков, Теория вероятн. и ее примен., 12, 2, 193 (1967). [2] А. В. Скороход, Теория вероятн. и ее примен., 1, 3, 289 (1956).