Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 51.01:530.145+519.48:513.015.2

МАТЕМАТИКА

Б. З. МОРОЗ

ФОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ АНАЛИЗЕ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 28 X 1970)

1. В этой заметке, следуя работе (1) и учитывая результаты исследований последних лет (2–6), мы строим систему аксиом квантовой механики, каждая из которых является в принципе экспериментально проверяемой. Сравнивая ситуацию, возникающую при описании квантовых систем, с классической статистической физикой, мы пытаемся выяснить причины недистрибутивности логики квантовой механики (quantum logic). С этой целью строится погружающая операция, сопоставляющая каждой формуле элементарной теории структур формулу классического исчисления предикатов. Мы увидим, что в теориях классической физики экспериментальные утверждения образуют булеву алгебру благодаря наличию постулата об одновременной проверяемости любой пары таких утверждений: каковы бы ни были наблюдаемые a, b существует эксперимент ρ, результатом которого является измерение значений этих наблюдаемых с любой заданной степенью точности. Этот постулат заведомо не выполняется в квантовой физике (7).

Рассмотрим физическую систему σ. Пусть A — наблюдаемая этой системы, E — борелевское множество на вещественной прямой; формулы вида $A\in E$ мы называем экспериментальными утверждениями. Пусть a, b — экспериментальные утверждения; следуя (1), говорят, что $a\leqslant b$ (a влечет b), если в с я к и й р а з, когда имеет место a, имеет место b. Частично упорядоченное множество экспериментальных утверждений называется л о г и к о й с и с т е м ы σ.

Формализуем возникающую ситуацию. Рассмотрим исчисление предикатов с тремя постоянными двуместными предикатами $R_1(a, \rho)$, $R_2(\psi, \rho)$, $Q(a, \rho)$, предметными переменными трех сортов $a, b, c, a_1, \ldots$ (переменные для экспериментальных утверждений), $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ (переменные для номеров экспериментов над системой), $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$ (переменные для состояний системы), равенством для переменных $\psi, \psi_1, \psi_2, \ldots$ и двумя контактами 0, 1 того же типа, что и переменные $a, b, c, a_1, \ldots$ Содержательный смысл предикатов следующий.

$R_1(a, \rho)$: в результате эксперимента ρ мы получаем ответ на вопрос, имеет ли место утверждение a; $R_2(\psi, \rho)$: эксперимент ρ проводится в момент, когда система находится в состоянии ψ; $Q(a, \rho)$: результат эксперимента ρ состоит в том, что утверждение a выполняется.

О б о з н а ч е н и я.

$$P(a, \psi) \rightleftharpoons \forall\rho \quad R(a, \psi, \rho) \supset Q(a, \rho); \quad R(a, \psi, \rho) \rightleftharpoons R_1(a, \rho) \mathbin{\&} R_2(\psi, \rho);$$

$$a\leqslant b \rightleftharpoons \forall\psi P(a, \psi) \supset P(b, \psi); \qquad a=b \rightleftharpoons a\leqslant b \mathbin{\&} b\leqslant a.$$

В п. 2 будет показано, как в характерной для классической физики ситуации простая аксиоматика приводит к булевой алгебре экспериментальных утверждений. В п. 3 будет обсуждаться более сложный случай квантовой механики.

2. Список аксиом для систем классической физики.

1) $\forall ab \exists \rho \quad R_1(a, \rho) \& R_1(b, \rho)$;

2) $\forall \rho \quad ((R_1(a, \rho) \& R_1(b, \rho)) \supset Q(a, \rho)) \supset \forall \rho (R_1(a, \rho) \supset Q(a, \rho))$;

3) $Q(a \cap b, \rho) \equiv Q(a, \rho) \& Q(b, \rho)$;

4) $Q(a \cup b, \rho) \equiv Q(a, \rho) \vee Q(b, \rho)$;

5) $Q(a', \rho) \equiv \neg Q(a, \rho)$;

6) $\forall \rho (\neg Q(0, \rho) \& Q(1, \rho))$;

7) $\forall \rho \exists \psi R_2(\psi, \rho)$;

8) $a \leqslant b \supset b' \leqslant a'$;

9) $R_1(a, \rho) \equiv R_1(a', \rho)$.

Основной является аксиома 1, формализующая постулат об одновременной проверямости любой пары экспериментальных утверждений. Аксиома 2 — это принцип взаимной независимости различных экспериментов друг от друга. В аксиомах 3—6 на множестве экспериментальных утверждений определяются операции $\cap$, $\cup$, $'$; отношение $\leqslant$ введено в обозначениях. Аксиома 7 утверждает, что при каждом измерении физическая система находится в каком-нибудь состоянии (разумеется, с физической точки зрения это утверждение тривиально). Аксиома 8 менее тривиальна; при вероятностной интерпретации статистической физики эта аксиома сводится к утверждению $\forall \psi \quad p_\psi(a) = 1 \supset p_\psi(b) = 1 \supset \forall \psi$ $p_\psi(b) = 0 \supset p_\psi(a) = 0$, где $p_\psi(a)$ — вероятность того, что в состоянии ψ имеет место a. Это утверждение действительно имеет место, ибо как посылка, так и заключение импликации эквивалентны включению $\lambda(a) \subseteq \subseteq \lambda(b)$, где через $\lambda(a)$ обозначена область фазового пространства, состоящая из точек, для которых имеет место a*. Из аксиом 1 — 5 вытекает

Предложение 1. *Множество экспериментальных утверждений, частично упорядоченное отношением $\leqslant$, является булевой алгеброй. Операции $\cap$, $\cup$, $'$ согласованы с отношением $\leqslant$ в смысле теории структур.*

3. Принцип неопределенности Гейзенберга показывает, что для систем, описываемых в квантовой механике, аксиома 1 не выполняется (в качестве контрпримера можно положить $a \rightleftharpoons x \in [0, \alpha]$, $b \rightleftharpoons p_x \in [0, \alpha]$, где α — достаточно малая константа, x и p_x — проекция координаты и импульса на выбранное направление в пространстве). Не выполняется и аксиома 2: для большинства b (при фиксированном a) посылка истинна вне зависимости от истинности формулы $Q(a, \rho)$. Поэтому желая придать смысл выражениям $a \cap b$ и $a \cup b$ в случае, если a и b несовместимы (т. е. $\forall \rho \neg R_1(a, \rho) \& R_1(b, \rho))$, мы вынуждены прибегнуть к более сложной конструкции.

Список аксиом для квантовых систем.

1) $\forall a \exists \rho R_1(a, \rho)$;

2) $\exists \rho (R_1(a, \rho) \& R_1(b, \rho)) \supset (\mathfrak{A}_2 \& \mathfrak{A}_3 \& \mathfrak{A}_4)$, *где посредством* $\mathfrak{A}_i$ *обозначена аксиома* i *в п.* 2;

3) $\mathfrak{A}_5 \& \mathfrak{A}_6 \& \mathfrak{A}_7 \& \mathfrak{A}_8 \& \mathfrak{A}_9$;

4) $P(a \cap b, \psi) \equiv (P(a, \psi) \& P(b, \psi))$;

5) а) $a_1 \cup a_2 \leqslant a_3 \equiv (a_1 \leqslant a_3 \& a_2 \leqslant a_3)$;

б) $a_3 \leqslant a_1 \cup a_2 \equiv \forall b \quad (a_1 \leqslant b \& a_2 \leqslant b) \supset a_3 \leqslant b$;

6) $b \leqslant a \supset (a \cap b') \cup b = a$;

7) а) $\forall a a = 0 \vee \exists b b \leqslant a \& \alpha(b)$, где $\alpha(b) \rightleftharpoons \exists! \psi P(b, \psi)$;

б) $(\alpha(b) \& a \leqslant a_1 \leqslant a \cup b) \supset (a_1 = a \vee a_1 = a \cup b)$;

8) $\forall \psi \exists a P(a, \psi)$.

Заметим прежде всего, что любое множество попарно совместимых утверждений (a и b совместимы, если $\exists \rho \; R_1(a, \rho) \& R_1(b, \rho))$ является булевой алгеброй; аксиомы 4) — 6) являются для таких утверждений следствиями остальных аксиом. Если a и b несовместимы, то формулы $Q(a \cap b, \rho)$ и $Q(a \cup b, \rho)$ не выражаются через $Q(a, \rho)$ и $Q(b, \rho)$.

* Здесь и в дальнейшем мы не останавливаемся на физическом обосновании формулируемых аксиом; наша цель — построить формализм, адекватный принятым в теоретической физике допущениям.

Предложение 2 (ср. ([5])). *Множество экспериментальных утверждений, частично упорядоченное отношением $\leqslant$, образует слабомодулярную атомарную структуру с ортогональным дополнением (с.м.а.о.), если операции $\cap$, $\cup$, $'$ удовлетворяют выписанным аксиомам, а отношение $\leqslant$ введено в обозначениях.*

Атомарность обеспечивается аксиомой 7, слабая модулярность — аксиомой 6. Как показал Пирон, всякая полная неприводимая с.м.а.о. размерности не меньше 3 изоморфна некоторой подструктуре структуры подпространств проективного пространства K над телом с инволюцией (если в качестве такого тела выбрано поле комплексных чисел, получается обычный формализм квантовой механики). В этом представлении состояниям отвечают последовательности ψ проективных прямых, экспериментальным утверждениям — подпространства пространства K, формула $P(a, \psi)$ эквивалентна утверждению: *подпространство, содержащее все элементы последовательности ψ, содержится в a.*

Замечание. Требования неприводимости и ограничения на размерность могут быть выражены некоторыми формулами рассматриваемого формализма. Условие полноты не выражается таким образом; это, однако, не очень существенно ввиду теоремы о пополняемости структур ([8]).

4. Указанная система аксиом обладает еще одним важным свойством. Рассмотрим множества M, A, B; определим по индукции множество C слов в алфавите $\{M, \cup, \cap, '\}$:

А) если $a \in M$, то $a' \in C$; Б) если $x \in C$ и $y \in C$, то $x \cap y \in C$ и $x \cup y \in C$ (так что C является свободной структурой с ортогональным дополнением, образующими которой служат элементы множества M). Пусть на $M \times A$, $B \times A$, $M \times A$ заданы соответственно предикаты $Q(a, \rho)$, $R_2(\psi, \rho)$, $R_1(a, p)$. Тогда, если определение этих предикатов согласовано с аксиомами п. 3, то это определение можно продолжить с сохранением указанной согласованности на $C \times A$, $B \times A$, $C \times A$ и такое продолжение единственно. Выбирая в качестве элементов множества M утверждения вида $A \in E$ (A — наблюдаемая физической системы, E — борелевское множество на вещественной прямой), мы завершаем построение, описанное в п. 1.

Отметим в заключение одну задачу технического характера. Обладает ли естественно возникающая из аксиоматики п. 3 погружающая операция следующим свойством: если образ формулы элементарной теории структур выводим в описанном прикладном исчислении предикатов, то формула выводима в элементарной теории структур?

Автор благодарит участников Ленинградского семинара по математической логике за весьма полезное и стимулирующее обсуждение.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
12 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Birkhoff, J. von Neumann, Ann. Math., 37, № 4, 823 (1936). [2] J. M. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, 1968. [3] V. S. Varadarajan, Geometry of Quantum Theory, 1968. [4] J. M. Jauch, C. Piron, Helv. phys. acta, 42, № 6, 842 (1969). [5] C. Piron, Helv. phys. acta, 37, № 415, 439 (1964). [6] S. Kochen, E. P. Specker, In: The Theory of Models (Proc. of the 1963 Symposium in Berkeley), 1965, p. 177. [7] В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, 1932. [8] Г. Биркгоф, Теория структур, 1952.