Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 1

УДК 517.522 *МАТЕМАТИКА*

ЧАН ЗА ЛИК

РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ ПО ФУНКЦИЯМ МИТТАГ — ЛЕФФЛЕРА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 3 III 1971)

Рассматривается вопрос о представлении аналитических функций из того или иного класса рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k E_\rho(\lambda_k z),$$

где $E_\rho(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n/\rho)}$ — функция Миттаг — Леффлера.

Пусть $L(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция порядка ρ и конечного типа с индикатрисой роста $h(\varphi)$. Положим

$$\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{a_n t^{n+1}}, \quad a_n = \frac{1}{\Gamma(1+n/\rho)}.$$

Функция $\gamma(t)$ называется функцией, *ассоциированной* с *функцией* $L(\lambda)$ *по функции* $E_\rho(z)$. Пусть $\overline{D}$ — наименьшая ρ-выпуклая оболочка множества всех особых точек функции $\gamma(t)$, D — множество внутренних точек $\overline{D}$.

Обозначим через $\gamma(t, \mu)$ функцию, ассоциированную (как функция переменного t) с функцией $(L(\lambda) - L(\mu)) / (\lambda - \mu)$ (как функцией переменного λ) по функции $E_\rho(z)$. Она целая по переменному μ и аналитическая по переменному t вне $\overline{D}$. Для функции $F(z)$, аналитической на $\overline{D}$, положим

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C F(t)\gamma(t, \mu)\, dt,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $F(z)$ — аналитическая функция.

В. Х. Мусоян ([1]), см. также ([2]), доказал теорему:

Пусть $\rho > 1/2$, $h(\varphi) > 0$ *и имеются окружности* $|\lambda| = \rho_k$ $(k \geqslant 1)$, $\rho_k \uparrow \infty$, *такие, что при любом* $\varepsilon > 0$

$$\ln|L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r^\rho, \quad r = \rho_k, \quad k > K(\varepsilon). \tag{1}$$

Тогда на любом замкнутом множестве $\overline{G} \subset D$ *имеет место оценка*

$$\left| F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{\omega_L(\mu, F) E_\rho(\mu z)}{L(\mu)} d\mu \right| < e^{-\delta \rho_k^\rho}, \quad z \in \overline{G}, \quad k > K(\overline{G}), \tag{2}$$

где $\delta > 0$ *зависит от* $\overline{G}$ *и от функции* $F(z)$.

Было отмечено, что если оценка (2) имеет место в какой-нибудь области $E \supset \overline{D}$, то функция $F(z)$ удовлетворяет в некоторой окрестности нуля уравнению

$$M_L(z, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C F(t) \Psi(z, t)\, dt = 0, \tag{3}$$

$\Psi(z, t)$ — функция, ассоциированная с $L(\lambda) E_\rho(\lambda z)$ по функции $E_\rho(z)$.

Теорема 1. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho > 0$ нормального типа с индикатрисой роста $h(\varphi) > 0$, для которой имеются окружности $|\lambda| = \rho_k$ со свойством (1).*

Если функция $F(z)$ аналитична на $\overline{D}$, удовлетворяет в некоторой окрестности нуля уравнению (3), то имеется область $E \supset \overline{D}$ такая, что на любом замкнутом множестве $\overline{G} \subset E$ имеет место оценка

$$\left| F(z) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu| = \rho_{n_k}} \frac{\omega_L(\mu, F) E_\rho(\mu z)}{L(\mu)} d\mu \right| < e^{-\delta\rho^\rho_{n_k}}, \quad z \in \overline{G} \subset E,$$

где $k > K(\overline{G})$, $\delta > 0$ зависит от $\overline{G}$ и функции $F(z)$, и $\{\rho_{n_k}\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{\rho_k\}$.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho > 0$ с индикатрисой роста $h(\varphi) > 0$, которая удовлетворяет условиям:

1) имеются последовательность $\{\rho_k\}_1^\infty$, $0 < \rho_k \uparrow \infty$, числа h и $a > 0$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(re^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon] r^\rho, \quad k > K(\varepsilon) \tag{4}$$

для $\rho_k - a\rho_k^{-h} \leqslant r \leqslant \rho_k + a\rho_k^{-h}$;

2) справедлива оценка сверху

$$|L(re^{i\varphi})| < \frac{A}{r^p} e^{h(\varphi) r^\rho}, \ p > \rho, \ r > R_0. \tag{5}$$

Такого рода функции имеются. В случае, когда ρ нецелое или ρ целое, но $h(\varphi) = \mathrm{const}$, существование функции $L(\lambda)$ со свойствами (4) и (5) вытекает из одной теоремы А. Ф. Леонтьева (см. ([3]), стр. 137).

В силу условия (5) функция $\gamma(t, \mu)$ как функция переменного t регулярна вне $\overline{D}$ и непрерывна до границы. Имея это в виду, рассмотрим какую-нибудь функцию $F(z)$, которая аналитична в D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$.

Положим

$$\omega_L(\mu, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} F(t) \gamma(t, \mu)\, dt.$$

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho > 0$ с индикатрисой роста $h(\varphi) > 0$, которая удовлетворяет условиям (4) и (5).*

Если функция $F(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$, то на любом замкнутом множестве $\overline{G} \subset D$ имеет место оценка (2).

Теорема 3. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция порядка $\rho > 1/2$ с индикатрисой роста $h(\varphi) > 0$, которая удовлетворяет условиям (4), (5) и еще следующему дополнительному условию: все нули λ_k этой функции простые, существуют непересекающиеся кружки C_k $(k \geqslant 1)$ радиусов $\gamma_k = O(|\lambda_k|^{1-\rho})$, содержащие внутри себя соответственно точки λ_k, на границе которых имеет место оценка снизу,*

$$|L(re^{i\varphi})| > \frac{A_1}{r^{p_1}} e^{h(\varphi) r^\rho}, \quad z = re^{i\varphi} \in \partial C_k, \tag{6}$$

$k > K_0$, $p_1 \geqslant p$ (p определено в условии (5)). Пусть далее, $F(z)$ — функция, аналитическая в D, непрерывная со своими обобщенными производными до порядка m включительно $(m > p_1 + \rho + 1)$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Тогда в замкнутой области $\overline{D}$ имеет место представление

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_L(\lambda_k, D^m F)}{\lambda_k^m L'(\lambda_k)}E_\rho(\lambda_k z)+P_{m-1}(z),\quad z\in\overline{D},$$

где $P_{m-1}(z)$ — многочлен степени не выше $(m-1)$. При этом под обобщенной производной D^kF порядка k от функции $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ понимается оператор

$$D^kF=\sum_{n=k}^{\infty}b_n\frac{a_{n-k}}{a_n}z^{n-k},\quad a_n=\frac{1}{\Gamma(1+n/\rho)}.$$

Пусть $\rho>1/2$ и пусть углы $\Psi_0=0<\Psi_1<\Psi_2<\ldots<\Psi_N<2\pi$ таковы, что $\pi/(2\rho)<\Psi_{n+1}-\Psi_n<\pi/\rho$ $(n=0,1,2,\ldots,N-1)$ и

$$\pi/(2\rho)<2\pi-\Psi_N<\pi/\rho.$$

Положим

$$L(\lambda)=\Big[P(\lambda)\sum_{n=0}^{N}E_\rho(\lambda e^{-i\Psi_n})\Big]\Big/Q(\lambda),$$

где $P(\lambda)=\lambda^s+\ldots+a_s$, $Q(\lambda)=\lambda^{s+p}+\ldots+b_{s+p_1}$.

Оказывается, что при подходящем выборе многочленов $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ функция $L(\lambda)$ будет иметь только простые нули и будет удовлетворять условиям (4), (5), (6). Заметим, что в этом примере ρ-выпуклая область D ограничена конечным числом дуг ρ-опорных линий.

В случае, когда D — круг $|z|<R$, нам удалось получить теорему о разложении для функций, которые лишь аналитичны в D (не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что D — единичный круг).

Теорема 4. *Любую функцию $F(z)$, аналитическую в круге $|z|<1$, можно представить в этом круге рядом*

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kF_\rho(\lambda_k z),\quad |z|<1$$

(равномерно сходится внутри), причем $\{\lambda_k\}\subset\{\mu_k\}$, где $\{\mu_k\}$ — последовательность, не зависящая от $F(z)$.

До сих пор область D была ограниченной. Сейчас рассмотрим случай, когда $\overline{D}=\overline{D}(\nu)$ — бесконечная ρ-выпуклая область $(\rho>1/2)$, ограниченная кривой $\operatorname{Re}(z^\rho)=\nu>0$ (начало координат принадлежит $D(\nu)$).

Теорема 5. *Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями λ_k $(k\geqslant 1)$, которая удовлетворяет условиям:*

$$1)\ L(\lambda)=O(e^{\nu\lambda^\rho}/(1+\lambda)^q),\quad q>\rho,\quad 0\leqslant\lambda<\infty;\tag{7}$$

2) *имеются замкнутые кривые Γ_k $(k\leqslant 1)$ со следующими свойствами:*

a) *контур Γ_k содержит внутри себя точки $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, длина контура Γ_k есть $O(\max\limits_{z\in\Gamma}|z|)$, причем*

$$\max_{z\in\Gamma_k}|z|=O(\min_{z\in\Gamma_k}|z|),\quad \min_{z\in\Gamma_k}|z|\to\infty \quad \textit{при}\quad k\to\infty;\tag{8}$$

b) *каково бы ни было $\gamma>0$,*

$$\varliminf_{k\to\infty}\ \min_{\substack{\lambda\in\Gamma_k\\ |\arg\lambda|\leqslant\gamma}}\frac{\ln|L(\lambda)|}{|\lambda|^\rho}=\nu,\tag{9}$$

$$\varliminf_{k\to\infty}\ \min_{\substack{\lambda\in\Gamma_k\\ \gamma\leqslant|\arg\lambda|\leqslant\pi}}\frac{\ln|L(\lambda)|}{|\lambda|^\rho}=+\infty;\tag{10}$$

c) *имеются положительные числа h и s такие, что*

$$\varliminf_{k\to\infty} \min_{\lambda\in G_k} \frac{\ln|L(\lambda)|}{|\lambda|^\rho} = \nu, \tag{11}$$

где G_k — круг радиуса hr_k^{-s} с центром в точке r_k — точке пересечения Γ_k с положительной вещественной полуосью. Пусть далее $F(z)$ — функция, аналитическая в области $D(\nu)$ и непрерывная в $\bar{D}(\nu)$.

Тогда в $D(\nu)$ имеет место представление

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k E_\rho(\lambda_k z) + \text{целая функция}, \quad z \in D(\nu).$$

Заметим, что целую функцию, как показал А. Ф. Леонтьев ([2]), всегда можно представить рядом по функциям Миттаг — Леффлера.

Пусть $\rho > 1/2$. Выберем $\rho_1 > \max\{\rho, 1\}$, $\rho_1 \neq 3/2$ и затем выберем целое число N такое, чтобы выполнялось

$$1/2 N + 1 < \rho_1 < N + 1 + 1/2.$$

Обозначим

$$\Psi_n = \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi(1 - 1/(2\rho_1))}{N+1} n \quad (n = 0, 1, \ldots, N+1),$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_k = \frac{\Psi_{k-1} + \Psi_k}{2} = \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi(1 - 1/(2\rho_1))}{N+1}(k - 1/2)\,(k = 1, 2, \ldots, N+1),$$

причем выберем ρ_1 еще так, чтобы $\pi/(2\rho) \neq \beta_k$. Положим

$$L(\lambda) = \frac{P(\lambda) E_\rho(\nu^{1/\rho}\lambda)}{Q(\lambda)} \left\{E_{\rho_1}(-\lambda) + \sum_{n=0}^{N} [E_{\rho_1}(\lambda e^{-i\Psi_n}) + E_{\rho_1}(\lambda e^{i\Psi_n})]\right\},$$

где $P(\lambda) = \lambda^m + \ldots + \alpha_m$, $Q(\lambda) = \lambda^{m+q} + \ldots + \beta_{m+q}$.

Можно показать, что при подходящем выборе $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ функция $L(\lambda)$ будет иметь только простые нули и будет удовлетворять условиям (7) — (11).

В условиях этого примера имеет место

Теорема 6. *Пусть функция $F(z)$ аналитична в области $D(\nu)$, непрерывна со своими обобщенными производными до порядка n включительно, где $n > \rho_1 + q + 1$, в замкнутой области $\bar{D}(\nu)$.*

Тогда в $\bar{D}(\nu)$ имеет место представление

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k E_\rho(\mu_k z) + \text{целая функция}, \quad z \in \bar{D}(\nu),$$

где $\{\mu_k\}$ — последовательность положительных нулей функции $L(\lambda)$.

Отметим, что в случае $\rho = 1$ все теоремы, кроме теоремы 3, установлены А. Ф. Леонтьевым.

Автор приносит глубокую благодарность члену-корреспонденту АН СССР А. Ф. Леонтьеву за постановку задачи и ценные указания.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Х. Мусоян, ДАН, 164, № 1, 43 (1965). [2] А. Ф. Леонтьев, УМН, 24, в. 2 (146), 97 (1969). [3] А. Ф. Леонтьев, Матем. сборн., 80 (122), 1, 117 (1969).