Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 51:155.001.57:681.3.06

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Н. Н. АЙЗЕНБЕРГ, А. И. ЦИТКИН

ПРОСТЫЕ ТЕСТОРЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 10 V 1971)

Понятие теста было введено С. В. Яблонским [1] для решения задач контроля электрических схем. Идея понятия теста оказалась настолько плодотворной, что использование тестора (модификации понятия теста), будучи развитым в работах Ю. И. Журавлева, А. Н. Дмитриева, В. Ф. Кренделева (см., например, [2]), определило целое направление в теории распознавания образов.

В настоящей работе вводится понятие простого тестора, которое удобно использовать в различных вопросах классификации объектов, в частности, в технической диагностике.

Все понятия, сведения, обозначения, относящиеся к теории булевых функций, используются нами в соответствии с [3].

Пусть $E = E_{k_1} \times E_{k_2} \times \ldots \times E_{k_n}$ — декартово произведение множеств $E_{k_i} = \{0, 1, \ldots, k_i - 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $[A_1, A_2, \ldots, A_s]$ — набор подмножеств множества E, где $A_i \cap A_j = \phi$ при $i \neq j$. Набор $[A_1', A_2', \ldots, A_s']$ назовем **обучающей выборкой набора** $[A_1, \ldots, A_s]$, если $A_i' \subseteq \subseteq A_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Задача распознавания состоит в отнесении вектора $b \in \bigcup\limits_{i=1}^{s} A_i$ к одному из классов A_i, если набор $[A_1, A_2, \ldots, A_s]$ не известен, но задана его обучающая выборка.

Признаками назовем функции $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, заданные на E, такие, что $\pi_i((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \alpha_i$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E$, $i = 1, \ldots, n$.

Определим на E n двуместных предикатов:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1, \text{ если } \pi_i(a) = \pi_i(b), \\ 0, \text{ если } \pi_i(a) \neq \pi_i(b), \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тестором для $[A_1', A_2', \ldots, A_s']$ называется набор признаков $\langle \pi_{i_1}, \pi_{i_2}, \ldots, \pi_{i_r} \rangle$ такой, что для любой пары множеств A_i' и A_j' $(i \neq j)$ и любых двух векторов $a_i \in A_i'$ и $a_j \in A_j'$ выполняется условие $(\pi_{i_1}(a), \pi_{i_2}(a), \ldots, \pi_{i_r}(a)) \neq (\pi_{i_1}(b), \pi_{i_2}(b), \ldots, \pi_{i_r}(b))$.

Тестор называют **тупиковым**, если любой собственный его поднабор не является тестором.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция от n переменных, заданная в виде фиксированной д.н.ф. δ. Сопоставим δ предикат $D(a, b)$ на E по следующему закону:

заменим в δ каждую переменную x_i на $P_i(a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. (1).

Зафиксируем произвольный вектор $b \in \bigcup\limits_{i=1} A_i$. Через $A_i'(D(a, b))$ обозначим множество $\{a \in A_i' \mid \forall a \in A_i' \; D(a, b) = 1\}$, а через $|A_i'(D(a, b))|$ — мощность множества $A_i'(D(a, b))$.

Будем относить вектор b к одному из классов $[A_1, \ldots, A_s]$, руководствуясь **решающим** правилом

$$d(b \in A_t \mid \forall i \neq t \quad |A_i'(D(a, b))| \leqslant |A_t'(D(a, b))|), \tag{2}$$

причем может оказаться, что вектор b следует отнести сразу к нескольким классам. Оценив вероятность верного отнесения вектора b к классу A_t по формуле Байеса, после упрощений получим

$$p(b \in A_t) = |A'_t(D(a, b))| \Big/ \sum_{i=1}^{s} |A'_i(D(a, b))|. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если решающее правило* (2) *относит вектор* b *к* A_t, *то для любого класса* A_i $(i \neq t)$ $p(b \in A_t) \geqslant p(b \in A_i)$. *Причем, руководствуясь* (2), *мы относим вектор* b *сразу к* $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ *тогда и только тогда, когда* $p(b \in A_{i_1}) = p(b \in A_{i_2}) = \ldots = p(b \in A_{i_m})$.

Набор предикатов $\tilde{P}_{i_1}(a, b), \tilde{P}_{i_2}(a, b), \ldots, \tilde{P}_i(a, b)$ назовем тесторным, если, положив $D(a, b) = \tilde{P}_{i_1}(a, b)\tilde{P}_{i_2}(a, b) \ldots \tilde{P}_{i_2}(a, b)$, получим, что для любого класса A_i' и любого вектора $b \in A_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ $p(b \in A_j) = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, s$.

Обозначим через $S(a, b)$ дизъюнкцию конъюнкций всех тесторных наборов предикатов, т. е. элементы каждого тесторного набора соединим знаком конъюнкции, а полученные конъюнкции — знаков дизъюнкции.

Теорема 2. *Если* $b \in A_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, *то*

$$p(b \in A_i) = |A'_i(S(a, b))| \Big/ \sum_{t=1}^{s} |A'_t(S(a, b))| = 1,$$

причем $p(b \in A_j) = 0 \quad (i \neq j)$.

Теорема 2 означает, что решающее правило безошибочно относит векторы из обучающей выборки к соответствующим множествам A_i (при использовании тесторных наборов).

Сопоставим предикату $S(a, b)$ д.н.ф. σ булевой функции $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая возникает из $S(a, b)$ путем замены предикатов $P_i(a, b)$ на булеву переменную x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 3. $g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ *тогда и только тогда, когда найдутся два вектора* $a_i \in A_i'$ *и* $a_j \in A_j'$ $(i \neq j)$ *такие, что* $P_t(a_i, a_j) = \alpha_t$, $t = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть σ_c — сокращенная д.н.ф. функции $g(x_1, \ldots, x_n)$ и $S_c(a, b)$ — предикат, полученный из σ_c по правилу (1). Простым импликантам д.н.ф. σ_c будут соответствовать тесторные наборы предикатов, которые мы назовем простыми.

Традиционному понятию тупикового тестора (теста, см. ([1], [2])) соответствуют простые тесторные наборы, не содержащие отрицаний предикатов.

Введем в рассмотрение еще одно решающее правило для отнесения вектора b к одному из классов A_t:

$$d(b \in A_t \mid \exists a \in A'_t \quad S(a, b) \,\&\, \forall i \neq t, \forall a_i \in A'_i \quad \bar{S}(a_i, b) = 1). \tag{4}$$

Теорема 4. *В результате применения решающего правила* (4) *вектор* b *отнесется к классу* A_t, *если и только если в результате применения правила* (2) *вектор* b *будет отнесен к* A_t, *причем* $p(b \in A_t) = 1$.

Рассмотрим случай, когда $E = E_2 \times E_2 \times \ldots \times E_2$.

Теорема 5. *Результат применения решающего правила* (4) *инвариантен относительно замены базиса в* n*-мерном векторном пространстве над полем Галуа* $GF(2)$.

Ужгородский государственный университет

Поступило 4 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Полонский, И. А. Чегис, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, **51**, 270 (1955). [2] А. Н. Дмитриев, Ю. И. Журавлев, В. Ф. Кренделев, Дискретный анализ, **7**, Сборн. тр. Сибирск. инст. матем. АН СССР, в. 7, Новосибирск, 1966, стр. 3. [3] В. М. Глушков, Синтез цифровых автоматов, М., 1962.