

В. Р. ВИНОКУРОВ, Ю. Н. СМОЛИН

ОБ АСИМПТОТИКЕ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ И ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 5 V 1971)

Вопросам асимптотического поведения решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздываниями посвящен ряд работ (см., например, (1-3)). В них рассмотрены вопросы асимптотической устойчивости, асимптотические разложения решений и т. д.

Мы будем заниматься задачей определения порядка роста резольвентных ядер $R_m(t, s)$ системы

$$x(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{m=1}^n K_m(t, s) x(s - g_m(s)) ds \quad (1)$$

с почти-периодическими (п.п.) ядрами и запаздываниями, частным случаем которой является система дифференциальных уравнений с п.п. коэффициентами и запаздываниями. При этом r -вектор $f(t)$, $r \times r$ -матрицы $K_m(t, s)$ и функции $g_m(t)$ таковы, что система (1) имеет в C_D ($D = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$) единственное решение*. Заметим, что уравнения такого типа возникают, например, при исследовании задач импульсной техники (см. (5)).

Будем говорить, что вектор-функция $f(t) \in \mathfrak{B}_1$, если $f(t) \in C_{[0, \infty)}$ и п.п. в смысле Бора (6); матрица $K(t, s) \in \mathfrak{B}_2$, если $K(t, s) \in C_D$ и для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{\tau_k\} \subset R_+$ ($k = 0, 1, 2, \dots$; $\tau_0 = 0$) относительно плотное и такое, что

$$\|K(t + \tau_k, s + \tau_k) - K(t, s)\| < \varepsilon, \\ \int_0^t \|K(t + \tau_k, s + \tau_k) - K(t, s)\| ds < \varepsilon,$$

где норма матрицы понимается как норма оператора в евклидовом векторном пространстве E_r . Положим $\tau^* = \sup_k (\tau_k - \tau_{k-1})$, где $\{\tau_k\}$ — общее множество ε -смещений $K_m(t, s)$ и $g_m(t)$ ($m = 1, \dots, n$). Введем матрицы $K_m(t, s, \xi)$ ($m = 1, \dots, n$), определенные при $(t, s) \in D$ и $\forall \xi \in [0, \infty)$ следующим образом ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$K_m(t, s, \xi) = \begin{cases} K_m(t - \tau_k, s - \tau_k), & \xi \in [0, \tau_1), \quad \xi + \tau_k \leq s < \xi + \tau_{k+1}, \\ K_m(t, s, \xi - \tau_k), & \xi \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad (t, s) \in D. \end{cases} \quad (2)$$

Если положим теперь $\bar{K}_m(t, s) \equiv K_m(t, s, s)$ и обозначим резольвенту ядра $\bar{K}_m(t, s)$ через $\bar{R}_m(t, s)$, то оказывается справедливой

Теорема 1. Пусть при $m = 1, \dots, n$ $g_m(t) \in \mathfrak{B}_1$, $K_m(t, s) \in \mathfrak{B}_2$.

Тогда, если

$$\|\bar{R}_m(t, s)\| \leq c_1 \exp[\alpha(t - s)],$$

то

$$\|R_m(t, s)\| \leq (c_1 + \varepsilon) \exp[(\alpha + \varepsilon)(t - s)].$$

* Как показано в (4), для этого достаточно выполнения условий ($m = 1, \dots, n$): $K_m(t, s) \in C_D$, $K_m(t, s) = 0$ при $s > t$; $g_m(t) \in C_{[0, \infty)}$ и неотрицательны; и, если $E_0 = \{t : t - g_m(t) \leq 0, 0 \leq t < \infty\}$, то $f(t) \in C_{[0, \infty)} \cup E_0$, $\sup_{t \in E_0} |f(t)| < c$. В дальнейшем эти условия будем предполагать выполненными.

В силу этой теоремы и результатов (7) поставленная задача сводится к отысканию порядка роста резольвентных ядер $\bar{R}_m(t, s)$ системы вида (1) с ядрами $\bar{K}_m(t, s)$.

Теорема 2. Пусть

$$\bar{R}_m(t, s, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \bar{R}_m(t + \tau_k, s), \quad (3)$$

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{df}}{=} \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < s + \tau^* < 2\tau^*\}, \quad T = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (\tau_k/k).$$

Если $\|\bar{R}_m(t, s)\| \leq c \exp[\alpha(t-s)]$ при $(t, s) \in D$, то $\bar{R}_m(t, s, \lambda)$ аналитична при $(t, s) \in \mathfrak{F}$ внутри круга $|\lambda| < r$, $r = \exp(-\alpha T)$.

Обратно, если при $(t, s) \in \mathfrak{F}$ матрица $\bar{R}_m(t, s, \lambda)$ аналитична внутри круга $|\lambda| < r$, то

$$\|\bar{R}_m(t, s)\| \leq c_1 \exp[\alpha(t-s)], \quad (t, s) \in D, \quad \alpha = -(\ln r)/T.$$

Таким образом, для определения порядка роста $\bar{R}_m(t, s)$ необходимо знать область аналитичности по λ матрицы $\bar{R}_m(t, s, \lambda)$ при $(t, s) \in \mathfrak{F}$. Положим

$$\mathfrak{L} \stackrel{\text{df}}{=} \{(t, \xi, s) : 0 \leq s \leq \xi \leq t < s + \tau^* < 2\tau^*\}, \\ \bar{R}_m(t + \tau_k, s) \equiv \bar{R}_{mk}(t, s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема 3. Пусть известны $R_m(t, \xi, s)$ — резольвенты ядер $K(t, \xi, s)$ при $(t, \xi, s) \in \mathfrak{L}$, $m = 1, \dots, n$.

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{R}_{mk}(t, s) &= \Phi_{ms}^{k0}(t, s, s) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} \int_s^{s+\tau_{j+1}-\tau_j} \Phi_{is}^{kj}(t, \xi, s) R_m(\xi - g_i(\xi) + \tau_j, s, s) d\xi, \\ \Phi_{is}^{kj}(t, \xi, s) &= K_i(t + \tau_k, \xi + \tau_j, s) + \\ &+ \sum_{l=1}^n \int_s^t R_l(t, \eta, s) K_l(\eta - g_l(\eta) + \tau_k, \xi + \tau_j, s) d\eta. \end{aligned}$$

Эта теорема позволяет определить коэффициенты ряда (3) по значениям $R_m(t, \xi, s)$ лишь в конечной области. Задача же определения $R_m(t, \xi, s)$ при $(t, \xi, s) \in \mathfrak{L}$ допускает применение приближенных методов.

Важным частным случаем рассматриваемой системы является система вида (1) с периодическими по двум аргументам ядрами и периодическими запаздываниями.

Пусть $\omega, \theta \in R_+$ такие, что

$$K_m(t + \omega, s + \omega) = K_m(t, s); \quad g_m(t + \theta) = g_m(t), \quad m = 1, \dots, n.$$

Остановимся на случае, когда ω и θ несоизмеримы: $\omega = \alpha\theta$, $\alpha \in J$. Тогда,

если $K_m(t, s)$ равномерно непрерывны в D , $\int_0^1 \|K_m(t+h, s+h) - K_m(t, s)\| ds \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [0, \infty)$, то, как нетрудно показать, $K_m(t, s) \in \mathfrak{B}_2$ с кратными θ элементами $\{\tau_k\}$. Явные выражения для τ_k дает

Теорема 4. Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n+2}, \dots]$. Пусть, далее, p_n/q_n и p_{n+1}/q_{n+1} — подходящие дроби числа α такие, что $1/q_{n+1} < \varepsilon/\theta$.

Тогда за элементы $\{\tau_k\}$ можно принять либо

$$\tau_k = (kp_n + [k\beta]p_{n+1})\theta^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

* $[k\beta]$ и $[k/\beta]$ означают, как и обычно, целые части чисел $k\beta$ и k/β соответственно.

либо

$$\tau'_k = ([k/\beta] p_n + k p_{n+1}) \theta,$$

где $\beta = [a_{n+2}; a_{n+3}]$.

В качестве примера рассмотрим систему

$$x(t) = f(t) + \int_0^t A(t) B(s) x(s - g(s)) ds, \quad (4)$$

где $r \times nr$ -матрица $A(t)$ и $nr \times r$ -матрица $B(t)$ ω -периодичны; $g(t + \theta) = g(t)$, $\omega = \alpha\theta$, $\alpha \in J$. В этом случае вспомогательное ядро $\bar{K}(t, s) = \bar{A}(t) \bar{B}(s)$, причем

$$\bar{A}(t) = A(t - \tau_k), \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots); \quad \bar{B}(s) \equiv B(s, s),$$

$$B(\xi, s) = \begin{cases} B(s - \tau_k), & s \in [\xi + \tau_k, \xi + \tau_{k+1}), \quad \xi \in [0, \tau_1), \\ B(\xi - \tau_k, s), & s \in [0, \infty), \quad \xi \in [\tau_k, \tau_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Далее, коэффициенты ряда (3)

$$\bar{R}_k(t, s) = \Phi(t, s) [E + T_k(s)] \dots [E + T_1(s)] \bar{B}(s), \quad (5)$$

где

$$\Phi(t, s) = \bar{A}(t) + \int_s^t \bar{R}(t, \xi, s) \bar{A}(\xi - g(\xi)) d\xi,$$

$$T_k(s) = \int_s^{s + \tau_{k+1} - \tau_k} B(\xi, s) \Phi(\xi, s) d\xi.$$

Теорема 5. Пусть существует такое $k_0 \geq 1$, что

$$\sup_n \left\| \prod_{i=0}^{k_0-1} [E + T_{n k_0 - i}(s)] \right\| = h \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тогда $\|\bar{R}_k(t, s)\| \leq C \exp(k(\ln h)/k_0)$ ($k = k_0, k_0 + 1, \dots$).

В частности, для системы (4) с $g(t) \equiv 0$ и $A(t)$ и $B(t)$ ω -периодичными из (5) следует

$$\bar{R}_k(t, s) \equiv R_k(t, s) = \bar{\Phi}(t, s) [E + \bar{T}(s)]^k B(s),$$

где принято

$$\Phi(t, s) = A(t) + \int_s^t R(t, \xi) A(\xi) d\xi, \quad \bar{T}(s) = \int_s^{s+\omega} B(\xi) \bar{\Phi}(\xi, s) d\xi.$$

Если теперь собственные значения матрицы $E + \bar{T}(s)$ по модулю меньше единицы (как показано в ⁽⁸⁾), они не зависят от s , то условия теоремы 5 оказываются выполненными с $h < 1$. Отсюда в силу теоремы 2 система (4) ($g(t) \equiv 0$) оказывается устойчивой по отношению к возмущениям $f(t)$ и теорема 5 обобщает, таким образом, известный признак Ляпунова об устойчивости систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами ⁽⁹⁾ (см. по этому поводу также ⁽⁸⁾).

Орский филиал

Всесоюзного заочного политехнического института

Поступило

10 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Красовский, ДАН, 114, № 2 (1957). ² Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959. ³ Р. Беллман, К. Кук, Дифференциально-разностные уравнения, М., 1967. ⁴ А. И. Логунов, ДАН, 150, № 2 (1963). ⁵ Д. А. Моругин, Импульсные устройства с запаздывающей обратной связью, М., 1961. ⁶ Б. М. Левитан, Почти-периодические функции, 1953. ⁷ В. Р. Винокуров, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 6 (1963). ⁸ А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950. ⁹ В. Р. Винокуров, Уч. зап. Уральск. гос. унив. им. А. М. Горького, в. 23, матем., 2 (1960).