

В. Я. ИВРИЙ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 V 1971)

В работе изучается нехарактеристическая задача Коши для нестрого гиперболических уравнений второго порядка

$$Lu \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^2 - 2 \sum_{i=1}^l a_i(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_0} - \sum_{i,j=1}^l a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=0}^l b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \right] u = f \quad (x_0 > 0); \quad (1)$$

$$u|_{x_0=0} = u_0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} u \Big|_{x_0=0} = u_1, \quad (2)$$

где $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in \Omega$; Ω — ограниченная связная область с бесконечно дифференцируемой границей; $\Omega \subset R^{l+1}$; $\Omega \cap \{x_0 = 0\} \neq \emptyset$ и $\Omega^+ = \{x \in \Omega, x_0 \geq 0\}$ связна; $a_i(x), a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Можно считать, что $a_i(x) \equiv 0$; в противном случае можно ввести новые переменные $y_0 = x_0, y' = y'(x)$ такие, что $a_i(y) \equiv 0$. Условие гиперболичности уравнения (1) принимает вид:

$$a_{ij}(x) \text{ — вещественны, } Q(x, \xi') \equiv \sum_{i,j=1}^l a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0. \quad (3)$$

Если многообразие $\mathfrak{M} \subset \bar{\Omega} \times (R^{l+1} - \{0\})$, описанное уравнением

$$\xi_0^2 - Q(x, \xi') = 0, \quad (4)$$

бесконечно дифференцируемое, то $\bar{\Omega}^+ = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_l$, где на Ω_k квадратичная форма $Q(x, \xi')$ имеет ранг k в каждой точке, Ω_1 и Ω_l относительно открыты в $\bar{\Omega}^+$. Из теоремы 1 и леммы 2 работы (2) следует, что, для того чтобы задача (1), (2) была однозначно разрешима при любых гладких правых частях и начальных данных для любых уравнений $\tilde{L}$, главная часть которых совпадает с главной частью L , необходимо выполнение одного из следующих условий:

(I) $l = 1$; $Q(x, \xi') \equiv \alpha^2(x) \cdot \xi_1^2$, $\alpha(x) \in C^\infty(\Omega^+)$ (условие гладкости многообразия $\mathfrak{M}$) и $\alpha(x)$ и $\frac{\partial}{\partial x_0} \alpha(x)$ одновременно в 0 не обращаются ни в одной точке $x \in \Omega^+$;

(II) $l = 2$; $\bar{\Omega}^+ = \Omega_l$; $Q(x, \xi') \equiv (p(x) \cdot \xi')^2$, где $p(x) \cdot \xi' = \sum_{j=1}^2 p_j(x) \xi_j$,

при этом $p(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}^+)$ и $p(x)$ и $\frac{\partial}{\partial x_0} p(x)$ линейно независимы в любой точке $x \in \Omega^+$;

(III) $l \geq 2$; $\Omega_1 = \phi$, Ω_0 является объединением локально-конечного числа l -мерных пространственно-подобных поверхностей; $\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^2 Q(x, \xi') > 0$ в любой точке $x \in \Omega_0$ и при любом $\xi' \neq 0$.

Из результатов ⁽¹⁾ нетрудно доказать, используя стандартные методы, что условия (I) и (III) являются достаточными, для того чтобы задача Коши была хорошо поставлена для всех операторов $\bar{L}$ с главной частью, совпадающей с главной частью L . В настоящей работе будет показана достаточность для этого условия (II).

Таким образом, будет получено необходимое и достаточное условие того, что корректность задачи Коши в C^∞ для данного оператора второго порядка с гладким $\mathfrak{M}$ будет определяться лишь его главной частью, т. е. не будет нарушаться при прибавлении к нему произвольных гладких младших членов.

Теорема 1. Пусть

$$L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \frac{\partial}{\partial x_0} + b_0(x) \frac{\partial}{\partial x_0} + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + c(x), \quad (5)$$

где $x = (x_0, x_1) \in \Omega \subset R^2$; Ω имеет бесконечно дифференцируемую границу, $\alpha(x)$ вещественнозначна, $\alpha(x)$, $b_0(x)$, $b_1(x)$, $c(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и Ω^+ — линза (т. е. характеристики, выпущенные из любой точки $\hat{x} \in \Omega^+$ в направлении убывания x_0 , содержатся в Ω^+ целиком вплоть до точки пересечения с $\{x_0 = 0\}$).

Если $\alpha(x) = \bar{\alpha}(x) \cdot \varphi(x_1)$, где $\bar{\alpha}(x)$, $\varphi(x_1) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и $\bar{\alpha}(x)$ и $\frac{\partial}{\partial x_0} \bar{\alpha}(x)$ одновременно в 0 не обращаются ни в одной точке $x \in \bar{\Omega}^+$; $b_1(x) = \bar{b}_1(x) \times \times \varphi(x_1)$, где $\bar{b}_1(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$, то задача (1), (2) имеет решение $u \in C^m(\bar{\Omega}^+)$, если $u_0, u_1 \in C^N(\bar{\Omega} \cap \{x_0 = 0\})$, $f \in C^N(\bar{\Omega}^+)$, где

$$N = N(m, n_+, n_-, K), \quad n_\pm = \left[\sup_{x \in \Omega, \bar{\alpha}(x) = 0} \pm \operatorname{Re} \tilde{b}_1(x) \right] + 1, \quad (6)$$

K — максимальное число точек $x^{(j)} \in \bar{\Omega}^+$ таких, что $\bar{\alpha}(x^{(j)}) = 0$ и $x^{(j)}$ и $x^{(j+1)}$ лежат на одной и той же характеристике L . При этом, если $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ такое, что $Lv = 0$ при $x_0 < t$ и $\operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega}^+$, то $v = 0$ при $x_0 < t$; t — любое, $t > 0$.

Замечание. Требуемые от L свойства симметричны относительно обеих характеристик; в этом нетрудно убедиться, перейдя к координатам (y_0, y_1) : $y_0 = x_0$, а y_1 определяется из задачи

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - \alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_1}\right) y_1 = 0; \quad y_1(0, x_1) = x_1.$$

Мы привели эту теорему с $l = 1$ потому, что в ней N зависит лишь от $|\operatorname{Re} \tilde{b}_1(x)|$, в отличие от ⁽¹⁾, где N зависит от $|\tilde{b}_1(x)|$.

Теорема 2. Пусть $\Omega \subset R^3$ имеет бесконечно гладкую границу,

$$L \equiv XY + B + c, \quad (7)$$

где $X \equiv X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \equiv \sum_{j=0}^2 X_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$, $Y \equiv Y(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, $B \equiv B(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x}$, $X(x)$,

$Y(x)$, $B(x)$, $c(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}^+)$; $X_0(x)$ и $Y_0(x)$ в 0 не обращаются ни в одной точке $x \in \bar{\Omega}^+$ и Ω^+ — линза.

Пусть векторы $X(x)$, $Y(x)$, $Z(x)$ линейно независимы в любой точке $x \in \bar{\Omega}^+$, где $Z(x)$ определяется из соотношения

$$Z \equiv Z(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x} = [X, Y] = XY - YX. \quad (8)$$

Тогда задача (1), (2) имеет решение $u \in C^m(\bar{\Omega}^+)$, если $u_0, u_1 \in C^N(\bar{\Omega} \cap \{x_0 = 0\})$, $f \in C^N(\bar{\Omega}^+)$, где

$$N = N(m, \Omega, X, Y, n_+, n_-, \Delta),$$

$$n_{\pm} = [\sup_{x \in \Omega^+} \pm \operatorname{Re} \varphi(x)] + 1, \quad \Delta = \sup_{x \in \Omega^+} \left| \sum_{j=0}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{Re} \varphi(x) \right|, \quad (9)$$

$\varphi(x)$ определяется из условия

$$B(x) = \alpha(x) \cdot X(x) + \beta(x) \cdot Y(x) + \varphi(x) \cdot Z(x). \quad (10)$$

При этом при фиксированных Ω, X, Y, Δ можно выбрать G — достаточно малую окрестность любой точки $\bar{x} \in \bar{\Omega} \cap \{x_0 = 0\}$ (размер G зависит лишь от Ω, X, Y, Δ) такую, что задача (1), (2) имеет решение $u \in C^m(\bar{G}^+)$, если $u_0, u_1 \in C^N(\bar{G} \cap \{x_0 = 0\})$, $f \in C^N(\bar{G}^+)$, где $N = \tilde{N}(m, n_+, n_-)$.

Если $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega}^+$ и $Lv = 0$ при $x_0 < t$, то $v = 0$ при $x_0 < t$, где $0 < t$ любое.

Теоремы 1, 2 доказывают, используя абстрактную теорему. Введем дополнительные обозначения.

Если E, F — нормированные пространства, то $\mathfrak{B}(E, F)$ — пространство линейных ограниченных операторов $A: E \rightarrow F$ с нормой

$$\|A\|_{\mathfrak{B}(E, F)} = \sup_{e \in E} \|Ae\|_F \cdot \|e\|_E^{-1}.$$

Если E — топологическое векторное пространство, $G \subset R^m$, то $C^k(\bar{G}, E)$ — пространство k раз непрерывно сильно дифференцируемых функций.

Теорема 3 (основная абстрактная теорема). Пусть дана последовательность вложенных друг в друга гильбертовых пространств $H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_p \supset \dots$ таких, что H_{p+1} плотно в H_p .

Пусть даны $\mathfrak{A} \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} \mathfrak{B}(H_p, H_{p+1})$, $\mathfrak{P} \subset \bigcap_{0 \leq p < \infty} \mathfrak{B}(H_p, H_p)$ и $\mathfrak{P}_1 \subset \bigcap_{0 \leq p < \infty} \mathfrak{B}(H_p, H_{p+1})$ — топологические подпространства такие, что $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}_1$ — топологическое вложение и следующие отображения, определенные на пространствах, стоящих слева, действуют в пространства, стоящие справа, и действуют в них непрерывно по совокупности аргументов:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} &\ni (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathfrak{P}, & \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}_1 &\ni (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1 \cdot \omega_2 \in \mathfrak{P}_1, \\ \mathfrak{A} \times \mathfrak{P}_1 &\ni (B, \omega) \rightarrow B\omega \in \mathfrak{P}, & \mathfrak{A} \times \mathfrak{P} &\ni (B, \omega) \rightarrow [B, \omega] = B\omega - \omega B \in \mathfrak{P}, \\ & & \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} &\ni (\omega_1, \omega_2) \rightarrow [\omega_1, \omega_2] \in \mathfrak{P}_1, \end{aligned}$$

где операции умножения и сложения понимаются в обычном смысле действий над операторами.

Пусть даны отрезок $J = [0, T]$, $A(t) \in C^\infty(J, \mathfrak{A})$, $\sigma(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t) \in C^\infty(J, \mathfrak{P})$, $\gamma(t) \in \bigcap_{0 \leq p < \infty} C^\infty(J, \mathfrak{B}(H_p, H_p))$ такие, что:

(I) существует семейство $U(t, s) \in \bigcap_{0 \leq k \leq 1} \bigcap_{0 \leq p < \infty} C^k(J_+^2, \mathfrak{B}(H_{k+p}, H_p))$, где $J_+^2 = \{t, s \in J^2, t \geq s\}$, такое, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t) \right) U(t, s) = 0 \quad (t \geq s),$$

$U(s, s) = I$ — тождественный оператор;

(II) существуют $\omega_k(t, s) \in C^\infty(J^2, \mathfrak{P})$ такие, что $A(t) = \omega_1(t, s) A(s) + \omega_2(t, s) \frac{\partial}{\partial s} A(s) + \omega_3(t, s)$ и $\sum_{i+j \leq 2} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^j \omega_k(t, s) \right\|_{\mathfrak{B}(H_p, H_p)} \leq M$ для

всех $0 \leq p < \infty$, $(t, s) \in J^2$, $1 \leq k \leq 3$ (M — фиксированная константа);

$$(III) \quad \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t) - [A(t), \sigma(t)] \in C^\infty(J, \mathfrak{P}_1);$$

(IV) выполняется одно из условий (IV)' или (IV)'':

$$(IV)' \quad [\sigma(t), \omega] = [\sigma(t), \gamma(s)] = 0 \text{ для всех } (t, s) \in J^2, \omega \in \mathfrak{P};$$

(IV)'' существуют $\lambda(t) \in C^1(J)$, $\theta < 1$ такие, что для всех $t \in J$, $p = 0, 1, \dots$, $u \in H_p$ таких, что $\|u\|_{H_p} = 1$

$$|\operatorname{Re}(\sigma(t)u, u)_{H_p} - \lambda(t)| \leq \theta/2.$$

И пусть n_+ , n_- — целые числа такие, что $n_- < \lambda(t) < n_+$ для всех $t \in J$.

Тогда задача

$$Lu \equiv \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(t) - \alpha(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \beta(t) \right) + \sigma(t) A_t(t) + \gamma(t) \right] u(t) = f(t),$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1$$

имеет решение $u \in C^m(J, H_m)$ как только $u_0, u_1 \in H_N$, $f \in C^N(J, H_N)$, где $N = N(m, n_+, n_-, TM)$.

Замечание. Можно было бы найти явное выражение для $N(m, n_+, n_-, TM)$, но точный ответ довольно громоздок и вряд ли является интересным.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
3 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. А. Oleinik, Comm. Pure and Appl. Math., 23, № 4, 569 (1970). ² В. Я. Иврий, ДАН, 197, № 3, 517 (1971).