

А. Д. ИОФФЕ

МОНОТОННЫЕ СУПЕРПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 7 V 1971)

1. Пусть (T, Σ, μ) — пространство с конечной положительной непрерывной мерой и $s: T \times R^n \rightarrow R^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям Каратеодори (т. е. измеримое по t при каждом фиксированном $x \in R^n$ и непрерывное по x почти при каждом $t \in T$). Оператор S , сопоставляющий измеримой функции $x(t)$ (измеримую же) функцию $s(t, x(t))$, мы называем суперпозицией. Суперпозиция S называется монотонной, если почти при каждом t

$$(x_1 - x_2, s(t, x_1) - s(t, x_2)) \geq 0 \quad (1)$$

при всех $x_1, x_2 \in R^n$.

Мы изучаем здесь монотонные операторы-суперпозиции в пространствах Орлича L_f , рассмотренных в (1). Непосредственным стимулом для нас послужило то обстоятельство, что многие важные операторы (например, эллиптические) могут рассматриваться как следы монотонных суперпозиций на подпространствах L_f .

2. Итак, пусть L_f — банахово пространство, порожденное симметричным нормальным выпуклым интегрантом $f(t, x)$. Мы предполагаем в дальнейшем, что f и f^* удовлетворяют условию (B) из (1), т. е. $f(t, x)$ и $f^*(t, y)$ суммируемы для всяких $x, y \in R^n$.

Используем следующие обозначения:

$$D(S) = \{x(\cdot) \in L_f | S(x(\cdot)) \in L_{f^*}\}, \quad R(S) = S(D(S)).$$

Предложение 1. Пусть $D(S)$ — поглощающее множество.

Тогда, для того чтобы $x(\cdot) \in D(S)$, необходимо и достаточно, чтобы скалярная функция $t \rightarrow (x(t), s(t, x(t)))$ была суммируемой.

Обозначим, как и в (1),

$$I_f(x(\cdot)) = \int_T f(t, x(t)) d\mu, \quad D_f = \{x(\cdot) | I_f(x(\cdot)) < \infty\}.$$

Теорема 1. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $D_f \subset D(S)$;
- 2) для некоторых $k > 0$ и $p(t) \in L_1$

$$f(t, x) \geq f^*(t, ks(t, x)) + p(t);$$

- 3) для некоторых $l > 0$ и $r(t) \in L_1$

$$f(t, x) \geq l \cdot (s(t, x), x) + r(t).$$

Заметим, что условия 1) и 2) эквивалентны для произвольных (не обязательно монотонных) суперпозиций. В случае классических пространств Орлича этот факт следует из теоремы 17,5 в (2).

Теорема 2. Пусть S — монотонная суперпозиция, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Тогда S — максимальный монотонный оператор из L_f в L_{f^*} .

В ситуации, описанной в теореме 2, суперпозиция S , конечно, хемин-непрерывна на D_f относительно топологии $\sigma(L_{f^*}, L_f)$ в L_{f^*} (т. е. непрерывна на любом линейном сегменте, лежащем в D_f), но поскольку, вооб-

ще говоря, $D_f \neq L_f$, максимальность S не следует из общих теорем (см., например (3)).

3. Напомним, что оператор A , действующий из банахова пространства в сопряженное, называется коэрцитивным, если

$$\langle A(x), x \rangle \geq c(\|x\|) \cdot \|x\|,$$

где $c(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. В этом пункте рассматриваются коэрцитивные суперпозиции в пространствах L_f .

Скажем, что f удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют число $k > 0$ и суммируемая действительная функция $p(t)$ такие, что

$$f(t, 2x) \leq kf(t, x) + p(t).$$

Как и для классических пространств Орлича (см. (2)) Δ_2 -условие эквивалентно равенствам

$$D_f = E_f = L_f, \quad L_f^* = L_{f^*}^*.$$

Теорема 3. Пусть скалярные функции $t \rightarrow (s(t, x), x)$ суммируемы для всех x из некоторой окрестности нуля в R^n .

Тогда, чтобы суперпозиция S из L_f в L_{f^*} была коэрцитивной, необходимо, а если f удовлетворяет Δ_2 -условию, и достаточно, чтобы для некоторых $l > 0, r(t) \in L_1$

$$(s(t, x), x) \geq f(t, lx) + r(t).$$

Из этой теоремы следует

Предложение 2. Если S — коэрцитивная суперпозиция, удовлетворяющая первым двум условиям теоремы 1, то

$$R(S) = L_{f^*}.$$

Следующая теорема содержит характеристику пространств L_f , в которых существуют коэрцитивные суперпозиции с $D(S) = L_f, R(S) = L_{f^*}$.

Теорема 4. При выполнении первых двух условий теоремы 1 следующие утверждения эквивалентны:

1) f и f^* удовлетворяют Δ_2 -условию;

2) существует коэрцитивная суперпозиция $S: L_f \rightarrow L_{f^*}$ с $D(S) = L_f$.

4. Таким образом, всюду определенная коэрцитивная (в частности, монотонная) суперпозиция существует лишь в рефлексивном пространстве L_f . Заметим еще, что если f удовлетворяет Δ_2 -условию, S коэрцитивна и $V = \sigma(L_f, L_{f^*})$ -замкнутое подпространство L_f , принадлежащее $D(S)$, то V необходимо рефлексивно.

В связи с этим возникает следующий вопрос: может ли в пространстве X^* , сопряженном к нерефлексивному банахову пространству X , существовать всюду определенный монотонный коэрцитивный оператор $A: X^* \rightarrow X$ (заметим, что Ф. Браудер в (4) предполагает существование такого оператора)?

Другим серьезным основанием для постановки такого вопроса является

Теорема 5. Пусть X — банахово пространство и существует всюду определенный на X^* циклический монотонный** коэрцитивный оператор $A: X^* \rightarrow X$.

Тогда X рефлексивно.

Доказательство этой теоремы опирается на критерий рефлексивности Джеймса (5) и данную Рокафелларом характеристику циклически монотонных операторов как субдифференциалов выпуклых функций (6).

* E_f — замыкание множества ограниченных функций (см. (1)).

** Оператор A называется циклически монотонным, если для всякого конечного набора точек $x_1, \dots, x_m$ из X

$$\langle x_2 - x_1, Ax_2 \rangle + \langle x_3 - x_2, Ax_3 \rangle + \dots + \langle x_1 - x_m, Ax_1 \rangle \geq 0.$$

5. В заключение мы рассмотрим ограничения монотонных операторов суперпозиции на подпространства L_f .

Пусть S — монотонная суперпозиция, V — подпространство L_f , замкнутое в топологии $\sigma(L_f, L_f^*)$, которую в дальнейшем будем называть слабой, и V^* — его слабо сопряженное. Обозначим через j оператор вложения V в L_f , $j^*: L_f^* \rightarrow V^*$ — сопряженный оператор. Тогда $A = j^* S j$ — монотонный оператор из V в V^* , определенный на множестве $j^{-1}(D(S)) = D(A)$.

Нас будет интересовать вопрос об описании образа $R(A)$ оператора A , $R(A) = A(D(A))$, т. е. по существу характеристика тех $v^* \in V^*$, при которых уравнение

$$Av = v^*$$

имеет решение.

Теорема 6. *Предположим, что f^* удовлетворяет Δ_2 -условию и $V \cap E_f$ слабо плотно в V . Пусть суперпозиция S обладает следующими свойствами:*

1) для всякого $k > 1$ найдутся $l > 0$ и $r(t)$ такие, что

$$f(t, kx) \geq l f^*(t, s(t, x)) + r(t);$$

2) существуют числа $c_1 > 0$ и c_2 такие, что для всех $x(\cdot) \in V$

$$\langle S(x(\cdot)), x(\cdot) \rangle \geq c_1 I_f(x(\cdot)) + c_2.$$

Тогда $R(A) = V^*$.

Теорема 7. *Пусть f удовлетворяет Δ_2 -условию и в V существует слабо плотное подмножество ограниченных функций. Предположим, что S удовлетворяет условиям 1) и 2) предыдущей теоремы * и, кроме того, $s(t, x(t))$ — ограниченная функция, если только $x(t)$ ограничена.*

Тогда

$$R(A) \supset j^* E_{f^*}.$$

Теорема 8. *Пусть f удовлетворяет Δ_2 -условию и V — подпространство L_f , замкнутое в топологии $\sigma(L_f, E_{f^*})$. Предположим, что S удовлетворяет условию 1) теоремы 6 * и для всякого $t < 1$ существует суммируемая функция $\rho(t)$ такая, что*

$$(s(t, x), x) \geq t f(t, x) + \rho(t).$$

Тогда $R(A) \supset j^* E_{f^*}$.

Утверждение теоремы 6 в случае, когда и f , и f^* удовлетворяет Δ_2 -условию, следует из общих теорем для монотонных операторов в рефлексивных пространствах (см. например, (7)). В случае, когда условие 1) теоремы 6 выполняется при $k = 1$ (а это, вообще говоря, не так даже, когда s есть градиент f по x), результат, аналогичный теореме 6, но для эллиптических операторов, был доказан М. И. Вишиком (8).

Заметим, что, когда суперпозиция S циклически монотонна, включение $j^* E_{f^*} \subset R(A)$ (конечно, при выполнении соответствующих требований на S) следует из простейших свойств выпуклых функций для любого L_f . Неясно, можно ли распространить этот результат на произвольные монотонные суперпозиции. Доказательство такого факта позволило бы перенести с сохранением общности классическую теорему существования для многомерных вариационных задач (9) на произвольные квазилинейные эллиптические уравнения в дивергентной форме.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Д. Иоффе, ДАН, 195, № 5, 1048 (1970). ² М. А. Красносельский, Я. Б. Рунтикский, Выпуклые функции и пространства Орлича, 1958. ³ F. E. Browder, Math. Ann., 175, № 2, 89 (1968). ⁴ F. E. Browder, Bull. AMS, 72, № 1, 89 (1966). ⁵ R. C. James, Israel J. Math., 2, № 2, 401 (1964). ⁶ R. T. Rockafellar, Pacif. J. Math., 17, № 3, 497 (1966). ⁷ R. T. Rockafellar, Trans. AMS, 149, № 1 (1970). ⁸ М. И. Вишик, ДАН, 151, № 4, 758 (1963). ⁹ Ch. Morrey, Multiple Integrals in the Calculus of Variations, 1966.

* Если f удовлетворяет Δ_2 -условию и неравенство 1) теоремы 6 выполнено для некоторого $k > 1$, то оно справедливо и для $k = 1$.