

М. Г. КУЗЬМИНА

ПРОБЛЕМА МИЛНА ДЛЯ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ЗАКОНОМ НЕКОНСЕРВАТИВНОГО РЭЛЕЕВСКОГО РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 13 V 1971)

Рассматривается однородная проблема Милна — задача об определении поля монохроматического поляризованного излучения в полубесконечной плоской рассеивающей и поглощающей атмосфере $z > 0$ при отсутствии падающего на границу $z = 0$ внешнего излучения. Предполагается, что закон рассеяния определяется угловой матрицей $\hat{P}(\theta_s) = \lambda \hat{P}_R(\theta_s)$, где $\hat{P}_R(\theta_s)$ — угловая матрица консервативного рэлеевского рассеяния, λ — величина альбедо акта рассеяния ($(1 - \lambda)$ — вероятность истинного поглощения в акте), θ_s — угол рассеяния. Мы рассмотрим случай $\lambda < 1$, предполагая, что λ не зависит от оптической толщины. Как и в консервативном случае, при $\lambda < 1$ задача допускает азимутально однородное решение, отвечающее полю линейно поляризованного излучения, которое полностью определяется двумерным вектором $\Psi(z, \mu)$, компоненты которого являются линейной комбинацией двух первых параметров Стокса $I(z, \mu)$ и $Q(z, \mu)$, где $\mu = \mathbf{n}\omega$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внутренней нормали к поверхности $z = 0$, ω — единичный вектор направления распространения излучения в данной точке.

Однородная проблема Милна с консервативным рэлеевским рассеянием ($\lambda = 1$) решена в квадратурах ⁽¹⁻³⁾. Проблема Милна с инсоляцией с угловой матрицей $\lambda \hat{P}_R(\theta_s)$ решена в ⁽⁴⁾ для произвольного угла падения внешнего излучения на границу ($\Psi(z, \mu)$ — четырехмерный вектор). Решение выражено через скалярные H -функции Амбарцумяна — Чандрасекара и матричные функции второго порядка $\hat{N}(\mu)$, удовлетворяющие матричным нелинейным интегральным уравнениям, аналогичным скалярным уравнениям для H -функций. Функции $\hat{N}(\mu)$ найдены численно для ряда значений λ . Уравнение переноса линейно поляризованного излучения с угловой матрицей $\lambda \hat{P}_R(\theta_s)$ исследовалось методом Кейза ⁽⁵⁻⁷⁾. Так, Моуррад и Сиверт ⁽⁵⁾ построили полную систему собственных векторов уравнения, состоящую из пары регулярных и континуума сингулярных собственных векторов. Теоремы полноты доказаны путем исследования системы парных сингулярных интегральных уравнений. Задачи для полупространства, однако, ими не решены. Функция Грина для бесконечной среды для двумерного векторного уравнения переноса построена в ⁽⁶⁾; в ⁽⁷⁾ решена неоднородная проблема Милна с распределенным падающим излучением. Коэффициенты разложения по собственным функциям дискретного и непрерывного спектра находятся как решение системы сингулярных интегральных уравнений. Авторами использована теория систем сингулярных интегральных уравнений, развитая Манджавидзе и Хведелидзе, и установлено существование канонического решения рассматриваемой ими системы.

В настоящей работе решение однородной проблемы Милна получено в виде суммы квадратур, содержащих компоненты функции углового распределения выходящего излучения (закон потемнения). Последние явля-

ются решением системы двух несингулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. (Ср. (37), (35), (36)).

Двумерный вектор $\Psi(z, \mu)$, описывающий поле линейного поляризованного излучения, является решением уравнения переноса

$$\mu \frac{\partial \Psi(z, \mu)}{\partial z} + \Psi(z, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 \hat{P}(\mu, \mu') \Psi(z, \mu') d\mu' \quad (1)$$

с граничным условием

$$\Psi(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) ищется в классе функций с асимптотикой

$$\Psi(z, \mu) = O(e^{s_0 z}), \quad z \rightarrow \infty, \quad 0 < s_0 < 1. \quad (3)$$

В качестве вектора $\Psi(z, \mu)$ можно выбрать, вообще говоря, любую линейную комбинацию параметров Стокса $I(z, \mu)$ и $Q(z, \mu)$, и этим выбором определяется ядро $\hat{P}(\mu, \mu')$ уравнения (1). Мы выберем представление, в котором $\Psi_1 = I(z, \mu)$, $\Psi_2 = Q(z, \mu)$. В этом случае

$$\hat{P}(\mu, \mu') = \hat{P}_1(\mu) \hat{P}_1^+(\mu') = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 \mu^2 + [\hat{A}_3 + \hat{A}_4 \mu^2] \mu'^2, \quad (4)$$

$$\hat{P}_1(\mu) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2}(1 - \mu^2) & 1 + \mu^2 \\ \sqrt{2}(1 - \mu^2) & -(1 - \mu^2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

($\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$ — известные числовые матрицы, символом $\hat{P}^+$ обозначена матрица, эрмитово сопряженная $\hat{P}$).

Пусть $\Psi^k(z)$ — k -й момент функции $\Psi(z, \mu)$,

$$\Psi^k(z) = \int_{-1}^1 \mu^k \Psi(z, \mu) d\mu. \quad (6)$$

Нетрудно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающую из (1) и связывающую $\Psi^k(z)$ при различных k , в частности,

$$d\Psi^1(z)/dz = \left\{ \lambda \left[\hat{A}_1 + \frac{1}{3} \hat{A}_2 \right] - \hat{I} \right\} \Psi^0(z) + \lambda \left[\hat{A}_3 + \frac{1}{3} \hat{A}_4 \right] \Psi^2(z); \quad (7)$$

$$d\Psi^2(z)/dz = -\Psi^1(z). \quad (8)$$

(Здесь $\hat{I}$ — единичная матрица второго порядка). Обращая дифференциальный оператор в левой части уравнения (1) и привлекая систему уравнений (7), (8), для $\Psi(z, \mu)$ найдем выражение

$$\Psi(z, \mu) = R(z, \mu) \begin{bmatrix} 1 - 3\mu^2 \\ 3(1 - \mu^2) \end{bmatrix} + \hat{D}(\mu) \int_z^{0, \infty} \Psi^0(t) e^{-(z-t)/\mu} dt, \quad (9)$$

$$R(z, \mu) = \frac{3\lambda}{4(4 - 3\lambda\mu^2)} \{ \mu [\Psi_1^1(z) + \Psi_2^1(z)] - \varepsilon [\Psi_0^1(0) + \Psi_2^1(0)] e^{-z/\mu} + \\ + \Psi_2^1(z) + \Psi_2^2(z) - \varepsilon [\Psi_2^1(0) + \Psi_2^2(0)] e^{-z/\mu} \}, \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu < 0, \\ 1 & \text{при } \mu > 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\hat{D}(\mu) = -\frac{3\lambda}{2\mu[4 - 3\lambda\mu^2]} \begin{bmatrix} 1 + (1 - 2\lambda)\mu^2 & -(1 - \mu^2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

(Верхний предел интеграла в (9) равен 0 при $\mu > 0$ и ∞ при $\mu < 0$.) Введем теперь образ Лапласа функции $\Psi^k(z)$:

$$\Phi^k(s) = \int_0^\infty \Psi^k(z) e^{-sz} dz. \quad (12)$$

Используя (7) и (8), можно найти связь между $\Phi^2(s)$ и $\Phi^0(s)$, а затем из

(1) получить интегральное уравнение для $\Phi^0(s)$;

$$[\hat{I} - \hat{\Lambda}(s)] \Phi^0(s) = \hat{T}(s) [\Psi^1(0) - s\Psi^2(0)] + G(s), \quad (13)$$

$$\hat{\Lambda}(s) = \frac{3\lambda}{2(4s^2 - 3\lambda)} \times \\ \times \begin{bmatrix} (3s^2 - 1 - \lambda) L_0(s) - [s^2 - 3(1 - \lambda)] L_2(s) & (s^2 - 1) [L_0(s) - 3L_2(s)] \\ [s^2 - 3(1 - \lambda)] [L_0(s) - L_2(s)] & 3(s^2 - 1) [L_0(s) - L_2(s)] \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$\hat{T}(s) = \frac{3\lambda}{2(4s^2 - 3\lambda)} \begin{bmatrix} L_0(s) - 3L_2(s) & L_0(s) - 3L_2(s) \\ 3[L_0(s) - L_2(s)] & 3[L_0(s) - L_2(s)] \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$L_0(s) = \frac{1}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s}, \quad L_2(s) = s^{-2} [L_0(s) - 1]; \quad (16)$$

$$G(s) = \int_{-1}^0 \frac{\Psi(0, \mu) \mu d\mu}{1 + s\mu}. \quad (17)$$

Из уравнения (13) находим независимые уравнения для компонент вектора $\Phi^0(s)$:

$$\Omega_0(s) \Phi_1^0(s) = \Omega_1(s) G_1(s) + \Omega_2(s) H_2(s); \quad (18)$$

$$\Omega_0(s) [(s^2 - 1) \Phi_2^0(s) + \Psi_1^1(0) + \Psi_2^1(0) - s(\Psi_1^2(0) + \Psi_2^2(0))] = \\ = \Omega_3(s) H_1(s) + \Omega_4(s) H_2(s); \quad (19)$$

$$\Omega_0(s) = \left(s^2 - \frac{3\lambda}{4}\right) \text{Det} [\hat{I} - \hat{\Lambda}] = s^2 \left[1 - \frac{3\lambda}{2} (L_0 - L_2)\right] \left[1 - \frac{3\lambda}{4} (L_0 - L_2)\right] - \\ - \frac{3\lambda(1 - \lambda)}{4} (L_0 - 3L_2); \quad (20)$$

$$\Omega_1(s) = s^2 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{9\lambda}{8} (s^2 - 1)(L_0 - L_2); \quad (21)$$

$$\Omega_2(s) = \frac{3\lambda}{8} (L_0 - 3L_2); \quad (22)$$

$$\Omega_3(s) = \frac{3\lambda}{8} [s^2 - 3(1 - \lambda)] (L_0 - L_2); \quad (23)$$

$$\Omega_4(s) = s^2 - \frac{3\lambda}{4} - \frac{3\lambda}{8} \{[3s^2 - 1 - \lambda] L_0 - [s^2 - 3(1 - \lambda)] L_2\}; \quad (24)$$

$$H_1(s) = (s^2 - 1) G_1(s),$$

$$H_2(s) = (s^2 - 1) G_2(s) + \Psi_1^1(0) + \Psi_2^1(0) - s[\Psi_1^2(0) + \Psi_2^2(0)]. \quad (25)$$

К независимым скалярным уравнениям (18) и (19) удастся применить вариант метода Винера — Хопфа. Решения их получаются в виде

$$\Phi_1^0(s) = \frac{C(s+1) - (s^2 - 1)\rho_-(s)}{s^2 - k_0^2} \tau_-(s); \quad (26)$$

$$\Phi_2^0(s) = \frac{\{(s+1)Q_4(s) - (s^2 - 1)^3\sigma_-(s)\} \tau_-(s) - s^2(s^2 - k_0^2)\{\Psi_1^1(0) + \Psi_2^1(0) - s[\Psi_1^2(0) + \Psi_2^2(0)]\}}{s^2(s^2 - k_0^2)(s^2 - 1)}, \quad (27)$$

$$\tau_{\pm}(s) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \frac{\ln \tau(u) du}{u - s} \right\}, \quad 0 < \gamma < 1; \quad (28)$$

$$\tau(s) = (s^2 - 1) \Omega_0(s) / s^2 (s^2 - k_0^2); \quad (29)$$

$$\rho_-(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \frac{\Omega_1(u) G_1(u) + \Omega_2(u) H_2(u)}{u^2 \tau_+(u) (u - s)} du, \quad 0 < \gamma_1 < 1; \quad (30)$$

$$\sigma_-(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \frac{\Omega_3(u) H_1(u) + \Omega_4(u) H_2(u)}{(u^4 - 1) \tau_+(u) (u - s)} du, \quad 0 < \gamma_2 < 1; \quad (31)$$

$$Q_4(s) = \sum_{n=0}^4 D_n s^n, \quad (32)$$

$a \pm k_0 = \pm k_0(\lambda)$ — единственная пара отличных от нуля действительных корней уравнения $\Omega_0(s) = 0$ ($0 < k_0 < 1$). Коэффициенты C и D_n выражаются через значения функций $\rho_-(s)$ и $\sigma_-(s)$ и их производных в точке $s = 0$. Численные значения для них определяются после того, как будет найдена функция $\Psi(0, \mu)$ ($\mu < 0$) углового распределения выходящего излучения, получающаяся из соотношения (8) при $z = 0$:

$$\Psi(0, \mu) = \frac{3\lambda(1-\mu)[\Psi_1^1(0) + \Psi_2^1(0)]}{4(4-3\lambda\mu^2)} \left[\frac{1-3\mu^2}{3(1-\mu^2)} \right] + \hat{D}(\mu)\Phi^0(-\mu^{-1}), \quad \mu < 0. \quad (33)$$

Функция $\Psi(0, \mu)$ определяется следующим образом. 1) Используя аналитические свойства функций $\Omega_k(s)$, $G_k(s)$ и $H_k(s)$ получаем для $\rho_-^{(n)}(0)$ и $\sigma_-^{(n)}(0)$ формулы, связывающие их со значениями $\Psi_k^m(0)$ ($k = 1, 2$; $m = 1, 2$) и некоторыми интегралами, содержащими функцию $\Psi(0, \mu)$; 2) опираясь на априорную информацию об аналитической структуре $\Phi^0(s)$, приходим к соотношениям, связывающим $\Psi_2^1(0)$, $\Psi_1^2(0)$ и $\Psi_2^2(0)$ с $\Psi_1^1(0)$ (нормировочная константа задачи); 3) подставляя все эти соотношения в формулу (33), получим систему двух несингулярных интегральных уравнений Фредгольма для компонент функции $\Psi(0, -\mu)$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(0, -\mu) = & X_{10}(\mu) + \sum_{m=1}^6 X_{1m}(\mu) \sum_{n=1}^2 \int_0^1 Y_{mn}(\mu') \Psi_n(0, -\mu') \mu' d\mu' + \\ & + \sum_{n=1}^2 \int_0^1 K_n(\mu, \mu') \Psi_n(0, -\mu') \mu d\mu'; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Psi_2(0, -\mu) = X_{21}(\mu) \sum_{n=1}^2 Z_n(\mu') \Psi_n(0, \mu') \mu' d\mu', \quad \mu > 0, \quad (35)$$

где $X_{nm}(\mu)$, $Y_{mn}(\mu)$, $Z_n(\mu)$, $K_n(\mu, \mu')$ ($m = 1, \dots, 6$; $n = 1, 2$) — известные функции, содержащие квадратуры. Производя обращение преобразования Лапласа (27), (28), находим функцию $\Psi^0(z)$:

$$\Psi_k^0(z) = (1 - \delta_{k2}) [A_1(k_0) e^{k_0 z} + A_2(k_0) e^{-k_0 z}] + \sum_{m=1}^2 \int_0^1 F_{km}(z, -\mu) \Psi_m(0, \mu) \mu d\mu, \quad (36)$$

где $A_1(k_0)$, $A_2(k_0)$ и $F_{km}(z, \mu)$ известны.

Подробное изложение этой работы дано в (8).

Автор выражает глубокую благодарность М. В. Масленникову за весьма полезные обсуждения.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. E. Siewert, S. K. Fraley, Ann. Phys. (N. Y.), **43**, 338 (1967). ² М. Г. Кузьмина, ДАН, **193**, 309 (1970). ³ H. Domke, Monatsber. Deutsch. Acad. Wissenschaften Berlin, **12**, H. 6—7 (1970). ⁴ K. D. Abhyankar, A. L. Fumat, Astron. Astrophys., **4**, 101 (1970). ⁵ S. A. Mourad, S. E. Siewert, Ap. J., **155**, 555 (1969). ⁶ T. W. Schnatz, S. E. Siewert, J. Math. Phys., **11**, 2733 (1970). ⁷ E. E. Burniston, S. E. Siewert, J. Math. Phys., **11**, 3417 (1970). ⁸ М. Г. Кузьмина, Проблема Милна для поляризованного излучения с законом неконсервативного рэлеевского рассеяния, препринт ИПМ, 1971.