

УДК 535.337

ФИЗИКА

В. С. ЛИСИЦА

# СИНТЕЗ КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО И УДАРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЙ В ТЕОРИИ УШИРЕНИЯ ВОДОРОДНЫХ ЛИНИЙ В ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 5 V 1971)

Теория штарковского уширения спектральных линий атомов в плазме строится, как известно <sup>(1)</sup>, на основе двух альтернативных приближений — квазистатического и ударного, справедливых соответственно для больших и малых частотных сдвигов. Построение теории уширения, справедливой также и в промежуточной области частот, либо ограничивалось общими соотношениями, не имеющими достаточно обзримого аналитического вида <sup>(2, 3)</sup>, либо было связано с более или менее удачными процедурами интерполяции <sup>(4, 5)</sup>. Между тем, возможность получения достаточно общей аналитической формулы, описывающей на единой основе переход от ударной области уширения к квазистатической, является одним из существенных вопросов теории уширения. Это в особенности относится к уширению водородоподобных линий, испытывающих линейный штарк-эффект. Дело в том, что прямое применение результатов квазистатической и чисто ударной теорий для получения полного контура линии, учитывающего одновременное воздействие ионов и электронов плазмы, дает для водорода неправильное асимптотическое поведение интенсивности <sup>(6, 7)</sup>. Попытки исправить эту некорректность с помощью полуэмпирических оценочных методов (см., например, <sup>(8)</sup>) не могут, очевидно, заменить последовательного расчета.

В настоящей работе получено явное аналитическое выражение для профиля водородной линии в плазме, которое синтезирует результаты ударного и квазистатического приближений, не будучи априори основано ни на одном из них.

Будем исходить из общего выражения для профиля  $I(\omega)$  некоторой штарковской компоненты линии, полученного в <sup>(3)</sup> на основе последовательного квантовомеханического рассмотрения:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(\Delta\omega)}{\Delta\omega^2 + \gamma^2(\Delta\omega)}, \quad (1)$$

где  $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$ ;  $\omega, \omega_0$  — наблюдаемая и невозмущенная частоты;

$$\gamma(\Delta\omega) = \frac{i}{2} \left\langle \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt V(t) \exp \left[ i\Delta\omega t - i \int_{-\infty}^t V(t') dt' \right] \right|^2 \right\rangle. \quad (2)$$

В случае линейного эффекта Штарка в адиабатическом приближении  $V(t) = \alpha / [\rho^2 + v^2(t - t_0)^2]$ , где  $\alpha$  — штарковская постоянная рассматриваемой компоненты;  $\rho, v, t_0$  — прицельный параметр пролета, скорость и момент наибольшего сближения возмущающей заряженной частицы; символ  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по  $\rho$ , т. е.  $\langle \dots \rangle = \int \dots 2\pi N v \rho d\rho$  ( $N$  — плотность частиц). Для простоты мы считаем, как это обычно делается в теории уширения, скорость  $v$  постоянной и равной некоторой характерной скорости максвелловского распределения <sup>(1)</sup>.

Выражение (2) по своей аналитической структуре\* по существу не

\* Интересно отметить, что формулы типа (1), (2) содержались еще в работах Спитцера <sup>(1)</sup>.

проще исходных формул обычной адиабатической теории, см. (1). При попытках явного аналитического вычисления (2) прибегают обычно к приближениям ударной или квазистатической теорий (1, 3), ограничиваясь, тем самым, предельными областями малых или больших  $\Delta\omega$ .

Между тем оказывается, что интеграл, входящий в (2), может быть вычислен в явном виде для произвольных  $\Delta\omega$ . Чтобы показать это, сделаем в (2) замену переменных  $u = \frac{v}{\rho} t$ ,  $\xi = \frac{\rho}{v} \Delta\omega$ , после чего (2) сводится к

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\langle \delta^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \exp [i(\xi u - \delta \arctg u)] \right|^2 \right\rangle, \quad (3)$$

где  $\delta \equiv \alpha / (\rho v)$ . Вводя далее новую переменную  $\varphi = \arctg u$ , приходим после некоторых преобразований к интегральному представлению функции Уиттекера  $W_{\lambda, \mu}(z)$  (9, 10):

$$\int_0^{\pi/2} \cos(a \operatorname{tg} \varphi - \gamma \varphi) \cos^v \varphi d\varphi = \frac{\pi a^{v/2}}{2^{v/2+1}} \frac{W_{\gamma/2, (v+1)/2}(2a)}{\Gamma(1 + (\gamma+1)/2)}, \quad (4)$$

где  $\Gamma(z)$  — Г-функция Эйлера. В нашем случае  $a \equiv \xi$ ,  $\gamma \equiv \delta$ ,  $v \equiv 0$ , так что из (3) получаем

$$\gamma = \frac{\pi^2}{2} \left\langle \delta^2 \left[ \frac{W_{\delta/2, 1/2}(2\xi)}{\Gamma(1 + \delta/2)} \right]^2 \right\rangle. \quad (5)$$

Интересно сравнить формулу (5) с результатами Спитцера (4), которые для частного случая целых четных  $\delta = 2k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) также допускают явное аналитическое выражение. Используя связь функции Уиттекера при целых значениях индекса  $\delta/2 = k$  с вырожденной гипергеометрической функцией  $F_1(\alpha, \gamma, z)$  (10), стр. 1077), получаем из (5)

$$\pi \frac{W_{k, 1/2}(2\xi)}{\Gamma(k+1)} = 2\pi (-1)^{k-1} \cdot \xi e^{-\xi} F_1(1-k; 2; 2\xi), \quad (6)$$

что в точности совпадает с соответствующим результатом (4). Подчеркнем, что в отличие от (4) наша формула (5) справедлива для любых  $\delta$ .

Выполняя, далее, в (5) усреднение по  $\rho$ , вводя безразмерные переменные  $x = 1/\delta$  и  $\beta = \Delta\omega\alpha/v^2$ , определяя  $I(\beta)$  соотношением  $I(\beta)d\beta = I(\omega)d\omega$ , получаем

$$I(\beta) = \frac{1}{\pi} \frac{h\gamma(\beta)}{\beta^2 + [h\gamma(\beta)]^2}, \quad (7)$$

$$\gamma(\beta) = \pi^3 \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left[ \frac{W_{1/(2x), 1/2}(2x\beta)}{\Gamma(1 + 1/(2x))} \right]^2, \quad (8)$$

где  $h \equiv N(\alpha/v)^3$  — характерный безразмерный параметр задачи, равный по порядку величины среднему числу возмущающих частиц в сфере вейскопфовского радиуса  $\alpha/v$  (1, 5). Отметим, что наше рассмотрение, в соответствии с (3), ограничено бинарным приближением, т. е. случаем  $h \ll 1$ .

Полученное распределение интенсивности для штарковской компоненты выражается через универсальную «бинарную» функцию  $\gamma(\beta)$  (8). Покажем, что квазистатическое и ударное приближения содержатся в (8) в качестве предельных случаев.

В квазистатическом пределе  $\beta \gg 1$ , как показывает анализ предельных выражений подынтегральной функции в (8), эффективные значения  $x_{\text{эф}}$ , определяющие основной вклад в интеграл, малы\* ( $x_{\text{эф}} \sim 1/\sqrt{\beta}$ ), так что

\* Это обстоятельство, как и то, что значение  $x_{\text{эф}}$  велико в ударном пределе  $\beta \ll 1$ , см. (11), непосредственно видно также из (5), если принять во внимание, что квазистатический и ударный пределы отвечают, соответственно, большому и малому значениям параметра  $\delta$ .

функцию Уиттекера в (8) можно заменить ее асимптотическим выражением для больших значений первого индекса и аргумента <sup>(9)</sup>:

$$W_{k,m}(z) \approx 2 \left( \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right)^{1/2} \exp \left( -k \ln k - k + \frac{4m^2 - 1/3}{8k} \right) \times \\ \times \sin [2k (\arccos \lambda - \lambda \sqrt{1-\lambda^2})], \quad (9)$$

где  $\lambda \equiv z/(4k)$ . Подставляя (9) в (8), пользуясь асимптотикой  $\Gamma(z)$  ( $z \rightarrow \infty$ ) и пренебрегая при интегрировании в (8) быстро осциллирующими членами ( $\beta \gg 1 \gg \gamma(\beta)$ ), получаем

$$\gamma(\beta) \approx \gamma_{\text{кв}}(\beta) = 2\pi^2 / \sqrt{\beta}, \quad (10)$$

т. е. после подстановки в (7) квазистатическое распределение интенсивности <sup>(1, 5)</sup>.

В ударном пределе  $\beta \ll 1$  анализ выражения (8) показывает, что  $x_{\text{эф}} \sim \sim 1/\beta \gg 1$ , так что в этом случае можно воспользоваться приближением <sup>(10)</sup>

$$W_{1/(2x), 1/2}(2x\beta) \sim W_{0, 1/2}(2x\beta) = \sqrt{2x\beta} / \pi K_{1/2}(x\beta) = e^{-x\beta}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (8), получаем

$$\gamma(\beta) \approx \gamma_{\text{уд}}(\beta) = \pi^3 \int_1^\infty \frac{dx}{x} e^{-x\beta} = -\pi^3 E_i(-\beta) \approx -\pi^3 [\ln \beta + c], \quad (12)$$

где  $E_i(-\beta)$  — интегральная экспонента <sup>(10)</sup>,  $c$  — постоянная Эйлера.

Формула (12) совпадает с результатом для ударной ширины компоненты, получающимся из ударной адиабатической теории <sup>(1, 5)</sup>. Отметим, что наличие логарифмического искажения ударной ширины (12) отвечает учету неполноты возмущающих пролетов <sup>(11)</sup>, или так называемому «динамическому» обрезанию Льюиса <sup>(12)</sup> (ср. также <sup>(3)</sup>).

Результат (8) позволяет получить значения  $\gamma(\beta)$  также и в промежуточной области частот  $\beta \sim 1$ , не прибегая к интерполяции. Соответствующие расчеты были выполнены на ЭВМ. Результаты оказались следующими:

|                       |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\beta$               | 0,01 | 0,03 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,5  | 1    | 1,5  | 2    | 3    | 5    |
| $\gamma(\beta)/\pi^3$ | 3,30 | 2,45 | 2,07 | 1,61 | 1,24 | 1,04 | 0,83 | 0,61 | 0,57 | 0,43 | 0,36 | 0,28 |

Функция  $\gamma(\beta)$  монотонно убывает с ростом  $\beta$ . При  $\beta \rightarrow \infty$   $\gamma(\beta)$  стремится к  $\gamma_{\text{кв}}(\beta)$  (10), оставаясь при этом меньшим  $\gamma_{\text{кв}}(\beta)$ . Это согласуется с известным результатом Холстейна <sup>(13)</sup> (см. также <sup>(5)</sup>), согласно которому поправка на тепловое движение к  $\gamma_{\text{кв}}(\beta)$  должна быть отрицательной. При  $\beta \rightarrow 0$   $\gamma(\beta) \approx \gamma_{\text{уд}}(\beta)$  (12) логарифмически расходится. Эта расходимость устраняется как обычно обрезанием интеграла в (12) на некотором  $x_{\text{мах}}$ , отвечающим, например, дебаевскому радиусу <sup>(1, 6)</sup>.

Результат (7), (8) получен в рамках адиабатического приближения. Для интересующего нас вопроса о профиле линии в переходной области частот такой подход вполне оправдан. Дело в том, что основная аналитическая структура результата (7), (8) сохраняется и при учете эффектов неадиабатичности <sup>(14)</sup>. В то же время важным достоинством адиабатического подхода является его универсальность, позволяющая единым образом описать все линии водородного спектра. Это весьма существенно, например, при анализе спектров высших членов серии Бальмера, где отсутствие обозримых аналитических результатов вынуждало к построению полумпирических формул <sup>(15)</sup>. Отметим, что область наблюдения профилей линий  $H_8 - H_{15}$  в <sup>(15)</sup> относится как раз к области промежуточных значений  $\beta$  (для электронного уширения). Полное сравнение результатов <sup>(15)</sup> с нашими результатами затруднено присутствием в <sup>(15)</sup> нештарковских механизмов уширения. Тем не менее, можно убедиться, что даже грубое приближение, получаемое добавлением к (7), (8) квазистатического кон-

тура, обусловленного ионами, хорошо описывает склоны профилей линий в <sup>(15)</sup>, где влиянием нештатковских механизмов уширения уже можно пренебречь.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Когану и Г. В. Шолину за ценные советы и внимание к работе.

Институт атомной энергии  
им. И. В. Курчатова

Поступило  
23 III 1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. И. Собельман, Введение в теорию атомных спектров, М., 1963. <sup>2</sup> P. Anderson, Phys. Rev., **76**, 701 (1952). <sup>3</sup> В. В. Якимец, ЖЭТФ, **51**, 1469 (1966). <sup>4</sup> L. Spitzer, Phys. Rev., **55**, 699 (1939); **56**, 39 (1939). <sup>5</sup> В. И. Коган, Сборн. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, Изд. АН СССР, **4**, 258 (1958). <sup>6</sup> Г. Грим, Спектроскопия плазмы М., 1969. <sup>7</sup> H. Pfenning, Zs. Naturforsch., **21a**, 1648 (1966). <sup>8</sup> H. R. Griem, Phys. Rev., **140**, A1140 (1965); Ap. J., **147**, 1092 (1967). <sup>9</sup> L. J. Slater, Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge, 1960. <sup>10</sup> И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., 1963. <sup>11</sup> В. И. Коган, ДАН, **135**, 1374 (1960). <sup>12</sup> M. Lewis, Phys. Rev., **121**, 501 (1961). <sup>13</sup> T. Holstein, Phys. Rev., **79**, 7441 (1950). <sup>14</sup> В. С. Лисица, Г. В. Шолин, ЖЭТФ, **61**, в. 9 (1971). <sup>15</sup> H. Schluter, JQSRT, **8**, 1217 (1968).