Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 62-505 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

Р. А. НЕЛЕПИН

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНЫХ И КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 10 V 1971)

Пусть объект автоматического управления описывается системой

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\eta_i + b_k u, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где η_k — координаты объекта, a_{ki}, b_k — постоянные коэффициенты, u — управление. При использовании аналитических методов теории оптимального управления, позволяющих синтезировать управление u из условия минимизации некоторого функционала, встречаются следующие трудности: 1) весовые коэффициенты функционала нужно выбирать по дополнительным критериям качества (1), что обычно связано с исследованием системы нелинейных дифференциальных уравнений; 2) коэффициенты оптимального закона управления нередко требуется вычислять из систем уравнений большой размерности; 3) оптимальный закон управления при его реализации искажается естественными нелинейностями; необходимо подбирать параметры реальной системы так, чтобы процессы в ней достаточно мало отличались от процессов в оптимальной системе. Рассматриваемый метод позволяет в ряде случаев преодолеть названные затруднения.

Управление u может быть синтезировано на основе так называемых локальных критериев. Пусть λ_i — собственные числа матрицы (a_{ki}); при ограничениях

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad |u| \leqslant 1 \tag{2}$$

квадратичная сильвестрова форма

$$V = \sum_{i,\, j=1}^{n} m_{ij}\eta_i\eta_j \tag{3}$$

убывает в каждой точке фазовой траектории с максимальной скоростью, если (2)

$$u = F(\sigma) = \begin{cases} -1, & \sigma > 0, \\ 1, & \sigma < 0, \end{cases} \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i\eta_i, \; c_i = 2\sum_{k=1}^{n} c_{ki}b_k; \tag{4}$$

$$c_{ki} = m_{ki}. \tag{5}$$

Управление u может быть синтезировано также на основе «глобальных» критериев. Так, при ограничениях

$$\int_0^\infty |u|^p\, dt = B, \quad \int_0^\infty |\sigma|^q\, dt = D, \tag{6}$$

где B, D — постоянные, зависящие от начальных условий, интеграл от сильвестровой формы

$$I = \int_0^\infty \sum_{i,\, j=1}^{n} m_{ij}\eta_i\eta_j\, dt \tag{7}$$

имеет минимум, если выполняются условия ([3])

$$|u| = k|\sigma^{q/p}|, \quad k = \text{const} > 0, \quad \operatorname{sign} u = -\operatorname{sign} \sigma,$$
$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1, \quad q > 0, \quad p > 1, \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} c_i \eta_i, \quad c_i = 2\sum_{k=1}^{n} c_{ki} b_k, \tag{8}$$

причем коэффициенты c_{ki} определяются из системы

$$m_{ik} = -\sum_{p=1}^{n} (c_{ip} a_{pk} + a_{pi} c_{pk}), \quad i, k = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Неособое преобразование

$$\eta_k = -\sum_{i=1}^{n} \frac{N_k(\lambda_i)}{D'(\lambda_i)} y_i, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

приводит уравнения (1), (3), (4) к виду

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + F(\sigma), \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i, \quad V = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} y_i y_j. \tag{11}$$

Здесь обозначено

$$N_i(\lambda_j) = \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha D_{\alpha i}(\lambda_j), \quad \gamma_i = -[D'(\lambda_i)]^{-1} \sum_{k=1}^{n} c_k N_k(\lambda_i); \tag{12}$$

$$D'(\lambda_i) = \left.\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i}, \quad q_{\alpha\beta} = [D'(\lambda_\alpha) D'(\lambda_\beta)]^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} m_{ij} N_i(\lambda_\alpha) N_j(\lambda_\beta). \tag{13}$$

При этом справедливы равенства

$$q_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}; \tag{14}$$

$$\gamma_k = 2\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}. \tag{15}$$

Преобразование (10) приводит уравнения (1), (7), (8) к виду

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + \Phi(\sigma), \quad \sigma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i, \quad I = \int_0^\infty \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} y_i y_j \, dt, \tag{16}$$

где функция $\Phi(\sigma)$ определена выражениями (8). При этом система уравнений (9) переходит в простые равенства

$$q_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha + \lambda_\beta) \tag{17}$$

и по-прежнему справедливы соотношения (15).

Рассмотрим сечение $G_2^{(s,r)}$ определяемое в пространстве параметров c_i $(i = 1, \ldots, n)$ системой уравнений ([4])

$$\sum_{k=2}^{n} c_k N_k(\lambda_i) = \delta_{is} A_s + \delta_{ir} A_r, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{18}$$

а в пространстве параметров γ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — соотношениями

$$\gamma_i = -[D'(\lambda_i)]^{-1}(\delta_{is} A_s + \delta_{ir} A_r), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

где A_s, A_r — произвольные постоянные (комплексные сопряженные при λ_s, λ_r — комплексных сопряженных), δ_{ij} $(j = s, r)$ символ Кронекера. Пусть матрица (a_{ki}) имеет s вещественных собственных значений. При различном выборе λ_s, λ_r системы вида (18) определяют $0{,}5[n + s(s-2)]$ различных сечений — плоскостей размерности 2 в пространстве параметров c_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Совокупность коэффициентов m_{ij}, удовлетворяющих неравенству Сильвестра, образует в пространстве параметров m_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ область, которую назовем областью оптимальности; этой области соответствуют области в пространствах параметров c_k или γ_k $(k = 1, \ldots, n)$.

Все сечения $G_2^{(s,r)}$ проходят через область оптимальности. В пространстве γ_k $(k=1,\ldots,n)$ при $s\neq n$, $r\neq n$, $r\neq s$ в сечении $G_2^{(s,r)}$ область оптимальности определена неравенством

$$(-1)^{s+r-1} 2\Delta_{sn,\,rn}\gamma_s\gamma_r - \Delta_{sn,\,sn}\gamma_s^2 - \Delta_{rn,\,rn}\gamma_r^2 + 2\Delta_{n-1}\gamma_s + 2\Delta_{n-1}\gamma_r > 0, \qquad (20)$$

а при $s=n-1$, $r=n$ в сечении $G_2^{(n-1,\,n)}$ — неравенством

$$-{}^1/_2\Delta_{n-2}\gamma_{n-1}^2 + \Delta_{n-1}\gamma_n + \Delta_{n-1}\gamma_{n-1} > 0. \qquad (21)$$

Определитель $\Delta_{in,\,jn}$ получается из определителя

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{vmatrix} \qquad (22)$$

вычеркиванием строк i и n, столбцов j и n; Δ_{n-1}, Δ_{n-2} — определители вида (22) порядков $n-1$, $n-2$. При вещественных γ_s, γ_r область (20) ограничена либо эллипсом, либо параболой, область (21) — всегда параболой. По формулам (12) эти области пересчитываются на пространство исходных коэффициентов c_k $(k=1,\ldots,n)$.

В условиях сечения $G_2^{(s,r)}$ уравнения (11) запишутся в виде

$$dy_k\,/\,dt = \lambda_k y_k + F(\sigma), \qquad \sigma = \gamma_s x_s + \gamma_r x_r, \qquad (23)$$

а уравнения (16)

$$dy_k\,/\,dt = \lambda_k y_k + \Phi(\sigma), \qquad \sigma = \gamma_s x_s + \gamma_r x_r. \qquad (24)$$

Каждая из систем (23), (24) содержит автономную подсистему 2-го порядка с переменными y_s, y_r, σ, которая может быть либо проинтегрирована, либо исследована на фазовой плоскости. После этого остальные функции $y_k(t)$ $(k\neq s,\ k\neq r)$ определяются из линейных уравнений 1-го порядка с заданным воздействием $\sigma(t)$, а функции $\eta_r(t)$ — по формулам (10). Определение процесса в оптимальной системе позволяет выбирать коэффициенты функционала (и закона управления) по дополнительным критериям качества.

Результаты, полученные для сечений, в силу непрерывности распространяются на их окрестности. Точные результаты, получаемые вдоль сечений, служат эталонами для применения между сечениями приближенных методов.

Заменим идеализированные характеристики $F(\sigma)$, $\Phi(\sigma)$ характеристиками $F^*(\sigma)$, $\Phi^*(\sigma)$ с гистерезисными петлями, мертвыми зонами и т. п. [4]. Полученные квазиоптимальные системы исследуем методом сечений, как указано выше. Пусть $\eta_k(t)$ — переходный процесс в строго оптимальной, $\eta_k^*(t)$ — в квазиоптимальной системе. Разность $\eta_k^*(t) - \eta_k(t)$ будет служить оценкой синтезированной системы.

Поступило
27 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Летов, Динамика полета и управление, М., 1969. [2] В. И. Зубов, Теория оптимального управления, Л., 1966. [3] А. А. Красовский, Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами, М., 1969. [4] Р. А. Нелепин, Точные аналитические методы в теории нелинейных автоматических систем, Л., 1967.