Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 1

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

И. А. ИБРАГИМОВ, Н. Б. МАСЛОВА

СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 11 I 1971)

Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковым распределением F. Обозначим через N_n число вещественных корней полинома $Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j x^j$. Как велико математическое ожидание $\mathbf{E}N_n$?

Впервые этот вопрос изучали Литтльвуд и Оффорд. Первые асимптотически точные результаты получили Кац ([1], [2]), Эрдеш и Оффорд ([3]), доказавшие, что при $n \to \infty$ $\mathbf{E}N_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n$ для нескольких специальных распределений F, принадлежащих области притяжения нормального закона; в последние годы эти результаты обобщены в двух направлениях: во-первых, доказано, что для всех распределений F, принадлежащих нормальной области притяжения нормального закона, при $n \to \infty$ справедливо соотношение ([4])

$$\mathbf{E}\{N_n | Q_n(x) \not\equiv 0\} \sim \frac{2}{\pi}\ln n, \quad \text{если } \mathbf{E}\xi_j = 0, \tag{1}$$

во-вторых, доказано, что если F — симметричное невырожденное устойчивое распределение, то ([5], [6])

$$\mathbf{E}N_n \sim B \ln n \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

где B — постоянная.

На самом деле соотношение (2) справедливо, если выполнены только условия: 1) $\mathbf{P}\{\xi_j = 0\} = 0$, 2) F принадлежит области притяжения какого-нибудь невырожденного устойчивого распределения. Более точно этот результат формулируется в теореме 1.

Характеристическая функция любого невырожденного устойчивого распределения может быть представлена в виде ([7])

$$\exp\left\{idt - c|t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|}\omega(t, \alpha)\right)\right\}, \tag{3}$$

где d, c, α, β — постоянные (d — любое вещественное число, $c > 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$),

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \pi\alpha/2 & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Характеристическая функция $\varphi(t)$ распределения F, принадлежащего области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией (3), при малых t допускает представление (см. теорему 2.6.5 в ([7]))

$$\varphi(t) = \exp\left\{imt - |t|^\alpha h(|t|)(1 + o(1)\left(1 - i\beta\frac{t}{|t|}\omega(t, \alpha)\right)\right\}, \tag{4}$$

где m — любое вещественное число, $h(|t|)$ — медленно меняющаяся при $t\to\infty$ функция. Положим

$$\Psi(\alpha,\beta,m)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{f(0,\alpha,\beta,m)-\frac{1}{2}f(\eta,\alpha,\beta,m)-\frac{1}{2}f(-\eta,\alpha,\beta,m)\right\}\frac{d\eta}{\eta^2},$$

$$f(\eta,\alpha,\beta,m)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{im(\xi+\eta)-\int\limits_0^{\infty}e^{-z\alpha}|\xi+z\eta|^{\alpha}dz+\right.$$

$$\left.+iK(\alpha,\beta)\int\limits_0^{\infty}e^{-z\alpha}|\xi+z\eta|^{\alpha}\operatorname{sgn}(\xi+z\eta)\,dz\right\}d\xi,$$

$$K(\alpha,\beta)=\begin{cases}\beta\operatorname{tg}(\pi\alpha/2) & \text{при } \alpha\neq1,\\ 0 & \text{при } \alpha=1.\end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть F принадлежит области притяжения устойчивого закона с характеристической функцией* (3) *и* $\mathbf{P}\{\xi_j=0\}=0$.

Тогда при $n\to\infty$ справедливы следующие соотношения:

1) *если* $0<\alpha<1$, *то* $\mathbf{E}N_n\sim[\Psi(\alpha,0,0)+\Psi(\alpha,\beta,0)]\ln n$;

2) *если* $1<\alpha\leqslant2$ *и* $\mathbf{E}\xi_j=0$, *то* $\mathbf{E}N_n\sim[\Psi(\alpha,0,0)+\Psi(\alpha,\beta,0)]\ln n$;

3) *если* $1<\alpha\leqslant2$ *и* $\mathbf{E}\xi_j\neq0$, *то* $\mathbf{E}N_n\sim\Psi(\alpha,0,0)\ln n$;

4) *если* $\alpha=1$, $\beta\neq0$, *то* $\mathbf{E}N_n\sim\Psi(1,0,0)\ln n$;

5) *если* $\alpha=1$, $\beta=0$, *то* $\mathbf{E}N_n\sim[\Psi(1,0,0)+\Psi(1,0,\delta)]\ln n$, *где* $\delta=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{m}{h(|t|)}$, m *и* $h(|t|)$ *определяются соотношением* (4).

Поскольку $\Psi(2,\beta,0)=\pi^{-1}$, в условиях теоремы для распределений F, принадлежащих области притяжения нормального закона,

$$\mathbf{E}N_n\approx2\pi^{-1}\ln n,\quad \text{если } \mathbf{E}\xi_j=0;$$

$$\mathbf{E}N_n\sim\pi^{-1}\ln n,\quad \text{если } \mathbf{E}\xi_j\neq0.$$

Если $0<\alpha<1$, $|\beta|=1$, то $\Psi(\alpha,\beta,0)$ и, следовательно, в этом случае

$$\mathbf{E}N_n\sim\Psi(\alpha,0,0)\ln n.$$

Пусть Z_n — число вещественных корней $Q_n(x)$, имеющих кратность не меньше, чем 2. При подсчете Z_n корень кратности l считается l *раз*.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 $\mathbf{E}Z_n=o(\ln n)$.

Отсюда следует, что теорема 1 справедлива при любом способе подсчета N_n (с учетом или без учета кратности корней).

Приведем схему доказательства высказанных утверждений. Обозначим через $N_n(a,b)$ число корней $Q_n(x)$ в промежутке $[a,b]$. При подсчете $N_n(a,b)$ кратный корень считается один раз, а корень, совпадающий с a или b, дает вклад в $N_n(a,b)$, равный $1/2$. Очевидно,

$$\mathbf{E}N_n(0,1)=\mathbf{E}N_n(1,\infty),\quad \mathbf{E}N_n(-1,0)=\mathbf{E}N_n(-\infty,-1).$$

Используя формулу Иенсена, нетрудно доказать, что

$$\mathbf{E}N_n(-1+(\ln n)^{-s},\,1-(\ln n)^{-s})\leqslant C(\ln n)^s\ln\ln n$$

для любого s из $(0,1)$. (Через C здесь и ниже обозначаются постоянные, не зависящие от участвующих в рассуждении параметров.) Поэтому достаточно научиться вычислять $\mathbf{E}N_n(a,b)$ для малых интервалов (a,b) из $[-1,-1+(\ln n)^{-s}]\cup[1-(\ln n)^{-s},1]$, $1>s>0$.

В силу леммы Каца (см. ([8]), стр. 21)

$$N_n(a,b)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_a^b\cos\xi Q_n(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\eta Q_n'(x)}{\eta^2}\,d\eta\,dx\,d\xi.$$

Положим

$$\overline{N}_n(a,b)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{|\xi|<T}\int\limits_a^b \cos\xi Q_n(x)\int\limits_{\varepsilon<|\eta|<R}\frac{1-\cos\eta Q_n'(x)}{\eta^2}\,d\eta\,dx\,d\xi.$$

Нетрудно выразить $\mathbf{E}\overline{N}(a, b)$ через характеристическую функцию $\varphi(t)$ случайных величин ξ_j. Мы доказываем, что для малых интервалов (a, b) из $[-1, -1+(\ln n)^{-s}]\cup[1-(\ln n)^{-s}, 1]$ $(s>0)$ можно найти такие положительные числа T, R, ε, что 1) величина $\mathbf{E}\{N_n(a, b)-\overline{N}_n(a, b)\}$ достаточно мала, 2) $\mathbf{E}\overline{N}_n(a, b)$ определяется только значениями $\varphi(t)$ при малых $|t|$. Поскольку в условиях теоремы асимптотика $\varphi(t)$ при $t\to 0$ известна, мы получаем, таким образом, возможность вычислить $\mathbf{E}\overline{N}_n(a, b)$ и, следовательно, $\mathbf{E}N_n$.

Существенную роль в доказательстве играют формулируемые ниже леммы. Пусть $|x|\in[-1(\ln n)^{-s}, 1]$, $0<s<1$. Определим нормирующие постоянные $B_{n,k}(x)\equiv B_k(x)$, исходя из равенства

$$\frac{h\left((B_k(x))^{-2}\min\{(1-|x|^{-k}, n^k\}\right)}{(B_k(x))^{\alpha}\max\{(1-|x|)^{k\alpha+1}, n^{-k\alpha-1}\}}=1\qquad(k=0,1,2,\ldots,n), \tag{5}$$

где h — функция, которая определяется представлением (4). Нетрудно доказать, что при достаточно больших n корень уравнения (5) существует. Положим $\gamma(a, b)\equiv\gamma=(b-a)\min\{(1-b)^{-1}, n\}$. Всюду ниже предполагаются выполненными условия теоремы 1 и n считается достаточно большим.

Лемма 1. *Пусть* $[a, b]\subset[1-(\ln n)^{-s}, 1]$, $0<s<1$. *Для любых* τ, μ, γ *таких, что* $\tau\geqslant 1$, $\mu\in(0,\alpha)$,

$$\gamma\equiv\gamma(a, b)<{}^1\!/_2\exp\{-(4+4/\mu)\}, \tag{6}$$

и для любого целого неотрицательного k справедливы неравенства

$$\mathbf{P}\{\sup_{x\in[a,b]}|\overline{Q}_n^{(k)}(x)|\geqslant\tau B_0(b)\}\leqslant\frac{c}{\tau^{\mu}}(e^{2+2/\mu}\gamma)^{k\mu}\left(\frac{k!}{(b-a)^k}\right)^{\mu},$$

$$\mathbf{P}\{\sup_{x\in[-b,-a]}|Q_n^{(k)}(x)|\geqslant\tau B_0(b)\}\leqslant\frac{C}{\tau^{\mu}}(e^{2+2/\mu}\gamma)^{k\mu}\left(\frac{k!}{(b-a)^k}\right)^{\mu},$$

где

$$Q_n^{(k)}(x)=\frac{d^k}{dx^k}Q_n(x),$$

$$\overline{Q}_n^{(k)}(x)=\begin{cases}\dfrac{d^k}{dx^k}\left[Q_n(x)-m\sum\limits_{j=0}^{n}x^j\right] & \text{при } \alpha>1,\ m=\mathbf{E}\xi_j,\\ Q_n^{(k)}(x) & \text{при } \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть k — любое фиксированное целое неотрицательное число,* $z>0$, $0<\varepsilon<1$, $L\equiv L(x)={}^1\!/_4\min\{(1-|x|)^{-2+\varepsilon}, n/2\}$. *Если* $[(8k+1)\ln n]/n\leqslant 1-|x|\leqslant(\ln n)^{-s}$, $s>0$, то

$$\mathbf{P}\{|Q_n^{(k)}(x)|<zB_k(x)\}\leqslant C\{z+z^{-1/2}|x|^L\}.$$

Если $0\leqslant 1-|x|\leqslant[(8k+1)\ln n]/n$, то

$$\mathbf{P}\{|Q_n^{(k)}(x)|<zB_k(x)\}\leqslant C\{z+z^{-1}n^{-1/(2\alpha)}\}.$$

Пусть $\overline{N}^{(k)}(c, d)$ $(N^{(k)}(c, d))$ — число корней $\overline{Q}_n^{(k)}(x)$ (соответственно $Q_n^{(k)}(x)$) в $[c, d]$. При подсчете $\overline{N}^{(k)}(c, d)$ и $N^{(k)}(c, d)$ корень кратности l считается l раз. Используя леммы 1 и 2, мы доказываем следующие три леммы.

Лемма 3. *Пусть* $[a, b] \subset [1-(\ln n)^{-s}, 1]$, $0<s<1$, $0<\varepsilon<1$, $\mu \in (0, \min\{\alpha, 1\})$, $\gamma(a, b)$ *удовлетворяет условию* (6), k — *произвольное, но фиксированное целое неотрицательное число. Если* $b \leqslant 1-[(8k+1)\ln n]/n$, *то*

$$\mathbf{P}\{\bar{N}^{(k)}(a, b) \geqslant l\} \leqslant C(\gamma^{l\mu/8} + \gamma^{l/16} b^L), \tag{7}$$

где $L \equiv L(b) = {}^1/_4 \min\{(1-b)^{-2+\varepsilon}, n/2\}$.
Если $b \geqslant [(8k+1)\ln n]/n$, *то*

$$\mathbf{P}\{\bar{N}^{(k)}(a, b) \geqslant l\} \leqslant C\{\gamma^{l\mu/8} + \gamma^{-l/16} n^{-1/(2\alpha)}\}. \tag{8}$$

Неравенства (7), (8) *остаются верными, если* $\bar{N}^{(k)}(a, b)$ *заменить на* $N^{(k)}(-b, -a)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия леммы* 3 *и пусть кроме того* $\alpha > 1$, $\mathbf{E}\xi_j \neq 0$.

Тогда при любом r *таком, что* $0<r<\alpha-1$, *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\{N^{(k)}(a, b) \geqslant 1\} \leqslant C \max\{(1-b)^r, n^{-r}\}.$$

Обозначим через $\mathscr{E}_z(c, d)$ $(\tilde{\mathscr{E}}_z(c, d))$ — событие, состоящее в том, что в промежутке $[c, d]$ существует точка x такая, что $|Q_n^{(k)}(x)| < zB_k(x)$, $Q_n^{(k+1)}(x) = 0$ (соответственно $|\tilde{Q}_n^{(k)}(x)| < zB_k(x)$, $\tilde{Q}_n^{(k+1)}(x) = 0$).

Лемма 5. *Пусть* $[a, b] \subset [1-(\ln n)^{-s}, 1-[(8k+1)\ln n]/n]$, $0<s<1$, $0<\varepsilon<1$, $0<\mu<\min\{\alpha, 1\}$, $0<z<1$, k — *фиксированное целое неотрицательное число,* $\gamma(a, b)$ *удовлетворяет условию* (6).

Тогда

$$\mathbf{P}\{\tilde{\mathscr{E}}_z(a, b)\} \geqslant C[z^{\mu/3} + z^{-3} z^L], \tag{9}$$

где $L = {}^1/_4 \min\{(1-b)^{-2+\varepsilon}, n/2\}$.

Неравенство (9) *остается верным, если* $\tilde{\mathscr{E}}_z(a, b)$ *заменить на* $\mathscr{E}_z(-b, -a)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
15 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Kac, Bull. Am. Math. Soc., 49, 314 (1943). [2] M. Kac, Bull. Am. Math. Soc., 50, 390 (1948). [3] R. Erdös, A. Offord, Proc. London. Math. Soc., 6, 139 (1956). [4] И. А. Ибрагимов, Н. Б. Маслова, Вестн. Ленингр. унив., сер. матем. и мех., 19, 4 (1968). [5] B. F. Logan, L. A. Shepp, Proc. London Math. Soc., 3, 18, 308 (1968). [6] B. F. Logan, L. A. Shepp, Proc. London Math. Soc., 3, 18, 29 (1968). [7] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, «Наука», 1965. [8] М. Кац, Вероятность и смежные вопросы в физике, М., 1965.