

В. М. КАМЕНКОВИЧ, В. А. МИТРОФАНОВ

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ВЛИЯНИЯ РЕЛЬЕФА ДНА НА ТЕЧЕНИЯ В ОКЕАНЕ

(Представлено академиком Л. М. Брежневским 4 I 1971)

1. Ветровые течения в баротропном океане переменной глубины H описываются уравнением (в безразмерной форме)

$$\frac{\varepsilon}{H} \Delta \psi + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{H} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{H} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} = \text{rot}_z \frac{\tau}{H}. \quad (1)$$

Здесь ψ — функция тока; f — параметр Кориолиса; ось x направлена на восток, ось y — на север; τ — вектор касательного напряжения ветра на поверхности океана; ε — малый параметр, характеризующий эффект трения в океане; Δ — оператор Лапласа.

Уравнение (1) обычно рассматривается в замкнутой области, на границе которой функция ψ задается. Нетрудно показать, что при $\frac{\partial}{\partial y} (f/H) > 0$ пограничный слой может существовать только у западного берега океана, а при $\frac{\partial}{\partial y} (f/H) < 0$ — только у восточного берега. Поэтому представляет интерес изучение задачи

$$\varepsilon \Delta \psi - y \partial \psi / \partial x = G(y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad -1/2 \leq y \leq 1/2; \quad (2)$$

$$\psi = 0 \text{ при } x = 0; 1 \text{ и } y = -1/2; 1/2; \quad (3)$$

$G(y)$ — известная функция, $G(-1/2) = G(1/2) = 0$. Если $f = f_0 + y$, то уравнение (2) получается из (1) при $H = H_0 e^y (1 + y/f_0)^{1-1/\varepsilon}$. Подобная задача обсуждалась качественно в (1); численное решение для не очень малых ε было получено в (2).

2. Будем искать асимптотическое разложение решения задачи (2), (3) при малых ε . Особенность задачи — в возникновении внутреннего пограничного слоя около линии $y = 0$. Разобьем наш квадрат на области (рис. 1), в каждой из которых функция ψ разлагается в соответствующий асимптотический ряд. Ограничиваясь первым членом такого ряда, имеем: в области

$$1^-: \psi = \psi_1^-(x, y) = G_1(y) (1-x)/y; \quad 0 < x \leq 1; \quad -1/2 \leq y < 0;$$

$$1^+: \psi = \psi_1^+(x, y) = -G(y) x/y; \quad 0 \leq x < 1; \quad 0 < y \leq 1/2;$$

$$2^-: \psi = \psi_2^-(\xi_-, y); \quad \xi_- = x/\varepsilon; \quad 0 \leq \xi_- < \infty; \quad -1/2 \leq y < 0;$$

$$2^+: \psi = \psi_2^+(\xi_+, y); \quad \xi_+ = (1-x)/\varepsilon; \quad 0 \leq \xi_+ < \infty; \quad 0 < y \leq 1/2;$$

$$3^-: \psi = \varepsilon^{-1/2} \psi_3^-(x, \eta); \quad \eta = y/\varepsilon^{1/2}; \quad 0 < x \leq 1; \quad -\infty < \eta \leq 0;$$

$$3^+: \psi = \varepsilon^{-1/2} \psi_3^+(x, \eta); \quad 0 \leq x < 1; \quad 0 \leq \eta < \infty;$$

$$4^-: \psi = \varepsilon^{-1/2} \psi_4^-(\xi_-, \eta); \quad \xi_- = x/\varepsilon^{1/2}; \quad 0 \leq \xi_- < \infty; \quad -\infty < \eta \leq 0;$$

$$4^+: \psi = \varepsilon^{-1/2} \psi_4^+(\xi_+, \eta); \quad \xi_+ = (1-x)/\varepsilon^{1/2}; \quad 0 \leq \xi_+ < \infty; \quad 0 \leq \eta < \infty.$$

Обычным путем из (2), (3) получаем следующие уравнения и граничные условия, справедливые в соответствующих областях:

$$\partial^2 \psi_2^\pm / \partial \xi_\pm^2 \pm y \partial \psi_2^\pm / \partial \xi_\pm = 0, \quad \psi_2^\pm(0, y) = 0; \quad (4)$$

$$\partial^2 \psi_4^\pm / \partial \xi_\pm^2 \pm \eta \partial \psi_4^\pm / \partial \xi_\pm = 0, \quad \psi_4^\pm(0, \eta) = 0; \quad (5)$$

$$\partial^2 \psi_3^\pm / \partial \eta^2 - \eta \partial \psi_3^\pm / \partial x = G(0); \quad (6)$$

$$\psi_3^-(1, \eta) = 0, \quad \psi_3^+(0, \eta) = 0. \quad (7)$$

Задачи (4) и (5) легко решаются:

$$\psi_2^\pm = M^\pm(y) (1 - e^{\mp \nu \xi_\pm}), \quad \psi_4^\pm = N^\pm(\eta) (1 - e^{\mp \eta \xi_\pm}), \quad (8)$$

где функции $M^\pm, N^\pm$ подлежат определению.

3. Условия сращения асимптотических разложений ^(3, 4) дают дополнительные граничные условия.

Сращивание асимптотических разложений в областях 1 и 2. Начнем с 1⁻ и 2⁻. Вводим «промежуточную» переменную $t = x/\varepsilon^\omega$, $0 < \omega < 1$. Тогда при $t \sim 1$, $y \sim 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\psi_1^-(\varepsilon^\omega t, y) \sim \psi_2^-(\varepsilon^{\omega-1} t, y)$. Из этого условия находим $M^-(y)$. Аналогично проводится сращивание 1⁺ и 2⁺ и определяется $M^+(y)$. Получаем

$$M^\pm(y) = \mp G(y) / y. \quad (9)$$

Сращивание асимптотических разложений в областях 1 и 3. Начнем с 1⁻ и 3⁻. «Промежуточная» переменная $t = y/\varepsilon^\omega$, $0 < \omega < 1/3$. Тогда при $x \sim 1$, $t \sim 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\psi_1^-(x, \varepsilon^\omega t) \sim \varepsilon^{-1/3} \psi_3^-(x, \varepsilon^{\omega-1/3} t)$. Из этого условия находим, что

$$\psi_3^-(x, \eta) \sim G(0) (1 - x)/\eta \quad \text{при } \eta \rightarrow -\infty. \quad (10)$$

Сращивание 1⁺ и 3⁺ проводится аналогично и приводит к условию

$$\psi_3^+(x, \eta) \sim -G(0) x/\eta \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Сращивание асимптотических разложений в областях 3 и 4. Начнем с 3⁻ и 4⁻. «Промежуточная» переменная $t = x/\varepsilon^\omega$, $0 < \omega < 2/3$. Тогда при $t \sim 1$, $\eta \sim 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\psi_3^-(\varepsilon^\omega t, \eta) \sim \psi_4^-(\varepsilon^{\omega-2/3} t, \eta)$. Из этого условия находим $N^-(\eta)$. Аналогично проводится сращивание 3⁺ и 4⁺ и определяется $N^+(\eta)$. Имеем

$$N^-(\eta) = \psi_3^-(0, \eta), \quad N^+(\eta) = \psi_3^+(1, \eta). \quad (12)$$

Таким образом, задача построения асимптотического разложения решения задачи (2), (3) свелась к определению функций $\psi_3^\pm$, удовлетворяющих уравнению (6), условиям (7), (10), (11) и условию склейки при $\eta = 0$, $0 < x < 1$:

$$\psi_3^-(x, 0) = \psi_3^+(x, 0), \quad \frac{\partial \psi_3^-}{\partial \eta}(x, 0) = \frac{\partial \psi_3^+}{\partial \eta}(x, 0). \quad (13)$$

Мы покажем, что такие функции могут быть найдены.

Проверим, что после определения функций $\psi_3^\pm$, асимптотические разложения в областях 1 и 4, 2 и 4 сращиваются. Действительно, для областей 1⁻ и 4⁻ при $\xi_- \sim 1$, $t \sim 1$ ($t = y/\varepsilon^\omega$, $0 < \omega < 1/3$) и $\varepsilon \rightarrow 0$ $\psi_1^-(\varepsilon^{1/3} \xi_-, \varepsilon^\omega t) \sim \varepsilon^{-1/3} \psi_4^-(\xi_-, \varepsilon^{\omega-1/3} t)$. Для областей 2⁻ и 4⁻ при $\xi_- \sim 1$, $t \sim 1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ $\psi_2^-(\xi_-, \varepsilon^\omega t) \sim \varepsilon^{-1/3} \psi_4^-(\varepsilon^{1/3} \xi_-, \varepsilon^{\omega-1/3} t)$.

Области 1⁺ и 4⁺, 2⁺ и 4⁺ рассматриваются аналогично.

4. Рассмотрим вспомогательную задачу определения функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей при $x \geq 0$, $y \geq 0$ уравнению

$$\partial^2 \varphi / \partial y^2 - y \partial \varphi / \partial x = 1 \quad (14)$$

и условиям

$$\varphi(0, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) = u(x); \quad (15)$$

$$\varphi(x, y) \sim -x/y \quad \text{при } y \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где $u(x)$ считается заданной. Функцию φ представим как $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 удовлетворяет уравнению (14) и условиям (15), (16) при $u(x) \equiv 0$, а φ_2 удовлетворяет однородному уравнению (14), условиям (15) и экспоненциально затухает при больших y . Функция φ_1 ищется в виде

$$\varphi_1(x, y) = y^2 F(\sigma), \quad \sigma = -y^3/9x, \quad -\infty < \sigma \leq 0. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), получим для $F(\sigma)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого нетрудно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию $\Phi(a, c, \sigma)$ (см. (5)). Окончательно находим

$$\varphi_1(x, y) = -\frac{3^{1/2}\Gamma(1/2)}{2\Gamma(2/3)} x^{2/3} \Phi\left(-2/3, 2/3; -\frac{y^3}{9x}\right) + 1/2 y^2. \quad (18)$$

Для построения функции φ_2 сделаем преобразование Лапласа по x . Обозначая через $\tilde{\varphi}_2(p, y)$ и $\tilde{u}(p)$ образы $\varphi_2(x, y)$ и $u(x)$ соответственно, получим

$$\tilde{\varphi}_2 = -\frac{3^{1/2}\Gamma(1/2)}{\pi} y^{1/2} \tilde{u}(p) p^{-1/2} K_{1/2}(2/3 \sqrt{p} y^{3/2}), \quad (19)$$

где $K_{1/2}(z)$ — функция Макдональда. Совершая обратное преобразование, находим

$$\varphi_2(x, y) = -\frac{3^{1/2}\Gamma(1/2)}{2\pi} \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1/2}} \exp[-1/9 y^3/(x-t)] dt. \quad (20)$$

Формулы (18) и (20) дают решение задачи (14) — (16).

5. Обозначим теперь функцию $\partial\psi_3^+/\partial\eta$ при $\eta = 0$ через $G(0)u(x)$; тогда, используя решение задачи (14) — (16) и второе условие (13), находим

$$\begin{aligned} \psi_3^+(x, \eta) = & -\frac{3^{1/2}\Gamma(1/2)}{2\pi} G(0) \left\{ \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1/2}} \exp[-1/9 \eta^3/(x-t)] dt + \right. \\ & \left. + \frac{3^{1/2}\pi}{\Gamma(2/3)} x^{2/3} \Phi\left(-2/3, 2/3; -\frac{\eta^3}{9x}\right) \right\} + 1/2 G(0) \eta^2; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \psi_3^-(x, \eta) = & -\frac{3^{1/2}\Gamma(1/2)}{2\pi} G(0) \left\{ -\int_x^1 \frac{u(t)}{(t-x)^{1/2}} \exp[1/9 \eta^3/(t-x)] dt + \right. \\ & \left. + \frac{3^{1/2}\pi}{\Gamma(2/3)} (1-x)^{2/3} \Phi\left(-2/3, 2/3; \frac{\eta^3}{9(1-x)}\right) \right\} + 1/2 G(0) \eta^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда в силу первого условия (13) получаем для определения $u(x)$ обобщенное интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^1 \frac{u(t) dt}{|x-t|^{1/2}} = \frac{3^{1/2}\pi}{\Gamma(2/3)} [(1-x)^{2/3} - x^{2/3}], \quad 0 < x < 1. \quad (23)$$

6. Для определения $u(x)$ из (23) удобно рассмотреть сначала решение уравнения

$$\int_0^1 \frac{v(t) dt}{|x-t|^a} = x^\beta, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < a < 1, \quad a + \beta > 0. \quad (24)$$

Будем следовать методу, предложенному в ^(6, 7). Используя специальное интегральное представление функции $|x-t|^{-\alpha}$, перепишем уравнение (24) в виде

$$\int_0^x (x-s)^{-(1+\alpha)/2} \left\{ s^{\alpha-1} \int_s^1 \frac{v(t)}{t^{(\alpha-1)/2}} \times \right. \\ \left. \times (t-s)^{-(1+\alpha)/2} dt \right\} ds = \\ = \frac{\Gamma(1/2 - \alpha/2) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(1/2 + \alpha/2)} x^{(\alpha-1)/2 + \beta}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что решение уравнения (24) сводится к последовательному решению двух обыкновенных интегральных уравнений Абеля. Используя известную формулу для решения такой задачи (см., например, ⁽⁸⁾), после несложных преобразований получим

$$\frac{2^{\alpha-1} \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(\alpha/2 + 1/2 + \beta) \Gamma(\alpha/2)}{\Gamma(\alpha + \beta)} [x(1-x)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \times \\ \times F\left(-\beta, 1; \frac{1+\alpha}{2}; 1-x\right), \quad (26)$$

где $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция ⁽⁹⁾.

Формула (26) позволяет сразу выписать решение уравнения (23):

$$u(x) = (3/4)^{1/2} \frac{\Gamma(1/2)}{\pi} [x(1-x)]^{-1/2} [F(-2/3, 1; 5/6; x) - \\ - F(-2/3, 1; 5/6; 1-x)]. \quad (27)$$

Формулы (21), (22), (27) дают решение задачи об определении функций $\psi_{\pm}(x, y)$.

7. Найденное асимптотическое разложение решения задачи (2), (3) позволяет при простых функциях $G(y)$ легко строить схемы линий тока. Пример такого построения приведен на рис. 1. Отметим отрыв пограничных течений от берегов $x=0$ и $x=1$ при $y=0$.

В заключение заметим, что условие $G(-1/2) = G(1/2) = 0$ было принято, чтобы избежать рассмотрения пограничных слоев толщиной $\sim e^{1/2}$ около границ $y = -1/2, 1/2$. Анализ таких пограничных слоев не вызывает затруднений.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. Welander, Tellus, 20, № 1, 1 (1968). ² А. М. Ильин, М. М. Силкина, Морские гидрофизические исследования, 5 (1971). ³ М. Ван-Дайк, Методы возмущений в механике жидкости, М., 1967. ⁴ J. D. Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics, 1968. ⁵ Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1, М., 1965. ⁶ Н. И. Ахиезер, В. А. Щербина, Уч. зап. Харьковск. гос. ун-ва, 80, Зап. матем. отд. физ.-мат. фак. Харьковск. гос. ун-ва и Харьков. матем. общ., 25, сер. 4, 191 (1957). ⁷ W. E. Williams, Proc. Cambr. Phil. Soc., 59, 3, 589 (1963). ⁸ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963.

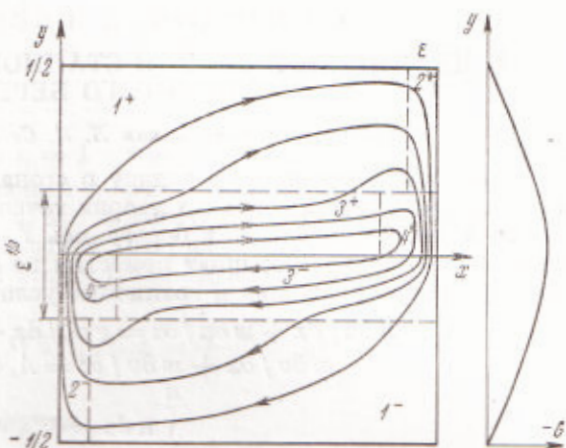


Рис. 1. Разбиение на области $1^{\pm}, 2^{\pm}, 3^{\pm}, 4^{\pm}$ (п.2) и схематическое изображение линий тока для задачи (2), (3) при функции $G(y)$, указанной справа (п.7)