Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В. С. ПИЛИДИ

О МНОГОМЕРНЫХ БИСИНГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРАХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 13 V 1971)

В данной работе локальный метод, разработанный в [1] для операторов «локального типа», модифицируется для случая операторов, названных автором операторами «билокального типа». Этим методом получаются необходимые и достаточные условия нётеровости бисингулярных операторов.

1°. Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы пространства конечных размерностей с мерами. Относительно мер будем предполагать следующее: меры неотрицательны, в область их определения входят все борелевские множества, меры всех открытых множеств отличны от нуля.

Через $\Lambda(X)$ и $K(X)$ ($\Lambda(Y)$ и $K(Y)$) обозначим соответственно множество линейных операторов локального типа и множество компактных операторов в $L_2(X)$ ($L_2(Y)$). Рассмотрим в $L_2(X\times Y)$ совокупность операторов, представимых в виде

$$\sum_i A_i\otimes B_i,$$

где $A_i\in\Lambda(X)$, $B_i\in\Lambda(Y)$ и суммирование ведется по конечному множеству индексов. Замыкание множества таких операторов по норме пространства линейных ограниченных операторов, действующих в $L_2(X\times Y)$, обозначим через $\Lambda(X)\otimes\Lambda(Y)$. (Сокращенно будем обозначать $\Lambda(X)\otimes\otimes\Lambda(Y)=\Lambda(X,\ Y)$. Если ясно, о каких X и Y идет речь, будем писать Λ вместо $\Lambda(X,\ Y)$.)

В алгебре Λ введем идеалы $K^1=K(X)\otimes\Lambda(Y)$, $K^2=\Lambda(X)\otimes K(Y)$; с ними свяжем два отношения эквивалентности ($\overset{1}{\sim}$, $\overset{2}{\sim}$) и две нормы ($|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$).

Определение 1. Оператор $A(\in\Lambda)$ назовем 1-нётеровым, если найдутся операторы $R_л$, $R_п(\in\Lambda)$ такие, что $R_л A\overset{1}{\sim}1$, $AR_п\overset{1}{\sim}1$.

Замечание. Аналогично вводится понятие 2-нётеровости. В дальнейшем будет определяться только одно из двух «симметричных» понятий.

Определение 2. Оператор $A(\in\Lambda)$ назовем локально 1-нётеровым в точке x_0 $(\in X)$ (1. н.x_0), если существуют операторы $R_л'$, $R_п'$ $(\in\Lambda)$ и окрестность u $(\subset X)$ точки x_0 такие, что

$$R_л' A(P_u\otimes 1)\overset{1}{\sim}P_u\otimes 1;\quad (P_u\otimes 1)AR_n'\overset{1}{\sim}(P_u\otimes 1)$$

(P_u — оператор умножения на характеристическую функцию множества u).

Определение 3. Операторы A, B $(\in\Lambda)$ назовем 1-эквивалентным в точке x_0 $(\in X)$ ($A\overset{1,\,x_0}{\sim}B$), если по любому ε (>0) найдется окрестность u $(\subset X)$ точки x_0 такая, что выполняется неравенство

$$|||(A-B)(P_u\otimes 1)|||_1<\varepsilon.$$

Пусть Z — топологическое пространство с мерой, удовлетворяющее тем же условиям, что X и Y, φ — гомеоморфное измеримое отображение некоторой окрестности u $(\subset X)$ на окрестность v $(\subset Z)$. Будем предполагать, что φ не искажает меры (см. [1], стр. 576).

Через T_φ обозначим линейный ограниченный оператор из $L_2(v)$ в $L_2(u)$, действующий по такому правилу: $(T_\varphi f)(x) = f[\varphi(x)]$.

Определение 4. Будем говорить, что A $(\in \Lambda(X, Y))$ в точке x_0 $(\in X)$ 1-квазиэквивалентен оператору B $(\in \Lambda(Z, Y))$ в точке z_0 $(\in Z)$ $(A \overset{1,x_0}{\sim} \varphi \overset{1,z_0}{\sim} B)$, если найдутся две окрестности u, v $(x_0 \in u \subset X$, $z_0 \in v \subset Z)$ и измеримое, гомеоморфное, не искажающее меры отображение $\varphi(u, x_0 \to v, z_0)$ такое, что

$$(T_{\varphi^{-1}} P_u \otimes 1)\, A\, (P_u T_\varphi P_v \otimes 1) \overset{1,z_0}{\sim} (P_v \otimes 1)\, B\, (P_v \otimes 1).$$

Основным результатом метода является

Теорема 1. *Оператор A $(\in \Lambda)$ есть оператор Нётера тогда и только тогда, когда он локально 1-нётеров для всех x $(\in X)$ и локально 2-нётеров для всех y $(\in Y)$.*

Она вытекает из следующих предложений.

Предложение 1. *Пусть оператор A $(\in \Lambda)$ есть оператор Нётера. Тогда его регуляризатор R принадлежит Λ.*

Предложение 2. *Оператор A $(\in \Lambda)$ есть оператор Нётера тогда и только тогда, когда он 1- и 2-нётеров.*

Предложение 3. *Оператор $A(\in \Lambda)$ 1-нётеров тогда и только тогда, когда он локально 1-нётеров во всех точках x $(\in X)$.*

При проверке условий теоремы 1 важную роль играют следующие предложения.

Предложение 4. *Пусть $A, B \in \Lambda$ и $A \overset{1,x_0}{\sim} B$, где $x_0 \in X$. Тогда операторы A и B одновременно являются* 1. н. x_0 *или не являются таковыми.*

Предложение 5. *Пусть $A \in \Lambda(X, Y)$, $B \in \Lambda(Z, Y)$ и $A \overset{1,x_0}{\sim} \varphi \overset{1,z_0}{\sim} B$, где $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$. Тогда операторы A и B одновременно являются либо локально 1-нётеровыми (A — в точке x_0, B — в точке z_0), либо не являются таковыми.*

2°. Пусть R_m и R_n — эвклидовы пространства размерности m и n соответственно. Через $\dot{R}_m$ будем обозначать одноточечную компактификацию пространства R_m.

В работе ([3]) введена алгебра операторов в $L_2(\dot{R}_m)$, которую мы обозначим через Q_m. Эта алгебра состоит из операторов, которым в образах преобразования Фурье соответствует оператор умножения на функцию, определенную на R_m, однородную степени нуль и имеющую непрерывное сужение на единичную сферу S_{m-1} $(\subset R_m)$.

В ([3]) доказано, что операторы из Q_m локального типа в $Y_2(\dot{R}_m)$ и алгебра Q_m $*$-изометрична алгебре $C(S_{m-1})$. В пространстве $L_2(\dot{R}_m \times \dot{R}_n)$ рассмотрим алгебры операторов

$$\sigma_1 = Q_m \otimes \Lambda(\dot{R}_n), \quad \sigma_2 = \Lambda(\dot{R}_m) \otimes Q_n.$$

Имеют место изоморфизмы

$$\sigma_1 = Q_m \otimes \Lambda(\dot{R}_n) \cong C(S_{m-1}) \otimes \Lambda(\dot{R}_n) \cong C(S_{m-1}, \Lambda(\dot{R}_n)),$$

где $C(S_{m-1}, \Lambda(\dot{R}_n))$ — алгебра непрерывных (в равномерной топологии) отображений S_{m-1} в $\Lambda(\dot{R}_n)$. Это отображение назовем символом оператора A $(\in \sigma_1)$ и будем обозначать $\hat{A}(\xi)$ $(\xi \in S_{m-1})$.

Определение 5. Оператор A $(\in \Lambda(\dot{R}_m, \dot{R}_n)$ назовем бисингулярным, если для каждого x $(\in \dot{R}_m)$, y $(\in \dot{R}_n)$ существуют операторы A_x $(\in \sigma_1)$, A_y $(\in \sigma_2))$ такие, что $A \overset{1,x}{\sim} A_x$, $A \overset{2,y}{\sim} A_y$.

С и м в о л о м б и с и н г у л я р н о г о о п е р а т о р а назовем пару отображений

$$\hat{A}_1(x, \xi): (x, \xi) \to \hat{A}_x(\xi) (\in \Lambda(\dot{R}_n)),$$
$$\hat{A}_2(y, \eta): (y, \eta) \to A_y(\eta) (\in \Lambda(\dot{R}_m)),$$

где $x \in \dot{R}_m$, $y \in \dot{R}_n$, $\xi \in S_{m-1}$, $\eta \in S_{n-1}$.

Основным результатом о бисингулярных операторах является

Т е о р е м а 2. *Бисингулярный оператор A является оператором Нётера тогда и только тогда, когда операторы $\hat{A}_1(x, \xi)$, $A_2(y, \eta)$ обратимы для всех допустимых значений параметров.*

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть каждой точке x $(\in X)$ соответствует ее окрестность u_x и отображение φ $(u_x \to \dot{R}_m)$ такие, что выполняются следующие условия: φ — гомеоморфное, измеримое, не искажающее меры отображение u_x в $\varphi(u_x)$. Будем предполагать, что аналогичному условию удовлетворяет Y. Для y $(\in Y)$ соответствующую окрестность и отображение будем обозначать v_y и ψ_y.

О п р е д е л е н и е 5'. Оператор A $(\in \Lambda(X, Y))$ назовем б и с и н г у л я р н ы м, если для каждого x $(\in \dot{R}_m)$, y $(\in \dot{R}_n)$ найдутся операторы A_x $(\in Q_m \otimes \Lambda(Y)$, A_y $(\in \Lambda(X) \otimes Q_n)$ такие, что

$$A \overset{1,\,x}{\sim} \varphi \overset{1,\,\varphi(x)}{\frown} A_x, \quad A \overset{2,\,y}{\sim} \psi \overset{2,\,\psi(y)}{\frown} A_y,$$

где $\varphi = \varphi_x$, $\psi = \psi_y$.

Т е о р е м а 2'. *Бисингулярный оператор является оператором Нётера тогда и только тогда, когда операторы $\hat{A}_x(\xi)$, $\hat{A}_y(\eta)$ $(x \in X,\ y \in Y, \xi \in S_{m-1}, \eta \in S_{n-1})$ обратимы для всех допустимых значений параметров.*

3°. Применим предыдущие результаты к задаче линейного сопряжения аналитических функций двух комплексных переменных.

Пусть Γ_1 (Γ_2) — простой замкнутый контур Ляпунова в плоскости комплексного переменного z_1 (z_2). Он делит эту плоскость на две области: внутреннюю D_1^+ (D_2^+) и внешнюю D_1^- (D_2^-). В пространстве двух комплексных переменных рассмотрим четыре области: D^{++}, D^{+-}, D^{-+}, D^{--}, где $D^{+-} = D_1^+ \times D_2^-$; кроме того, введем множество $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Через $H^{\pm\pm}$ обозначим классы функций двух переменных, аналитических в соответствующих областях и представимых там интегралом типа Коши с плотностью из $L_2(\Gamma)$.

Задача линейного сопряжения ставится так: найти четыре функции $\Phi^{\pm\pm}$ $(\in H^{\pm\pm})$ при условии, что на Γ их предельные значения удовлетворяют (почти всюду) условию

$$G_{++}(t)\Phi^{++}(t) + G_{+-}(t)\Phi^{+-}(t) + G_{-+}(t)\Phi^{-+}(t) + G_{--}(t)\Phi^{--}(t) = g(t),$$

где $t \in \Gamma$, $G_{\pm\pm}(t)$ непрерывны на Γ, $g(t) \in L_2(\Gamma)$.

Т е о р е м а 3. *Задача линейного сопряжения удовлетворяет теории Нётера тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) $G_{\pm+}(t) \neq 0$, $G_{+-}(t) \neq 0$, $G_{-+}(t) = 0$, $G_{--}(t) = 0$, $t \in \Gamma$;

2) $\mathrm{Ind}_1\, G_{+\pm} = \mathrm{Ind}_1\, G_{-\pm}$, $\mathrm{Ind}_2\, G_{\pm+} = \mathrm{Ind}_2\, G_{\pm-}$.

(*Здесь $\mathrm{Ind}_k\, G$ — приращение аргумента функции по k-й переменной.*)

З а м е ч а н и е. При условии, что Γ_1 и Γ_2 — окружности, аналогичный результат получен в ([3]). В случае общих контуров методы этой статьи применить нельзя.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. Б. Симоненко за руководство работой.

Ростовский государственный
университет

Поступило
13 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Б. С и м о н е н к о, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, 567 (1965). [2] И. Б. С и м о н е н к о, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, 757 (1965). [3] И. Б. С и м о н е н к о, Матем. исслед., 3, 1, Кишинев, 1968, стр. 108.