Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 513.731

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ МОНЖА — АМПЕРА

В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения вида

$$\det(\partial^2 z / \partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0. \qquad (1)$$

Как известно, для любой строго выпуклой области G и любой непрерывной функции ψ, заданной в качестве граничных значений, существует обобщенное решение задачи Дирихле уравнения (1) [1]. При известных условиях это решение регулярно, если регулярна правая часть уравнения [2]. К сожалению, эти условия относятся не к данным задачи, а к самому решению. В связи с этим представляет интерес

Теорема. *Задача Дирихле для уравнения* (1) *в строго выпуклой области G всегда разрешима, если граница области G и функция ψ, заданная в качестве граничных значений решения, принадлежат классу C^2. Решение принадлежит классу $C^{k+1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, если функция φ принадлежит классу C^k $(k \geq 3)$. Решение аналитическое, если функция φ аналитическая.*

Эта теорема для $n = 2$ хорошо известна и верна при более слабых условиях. Именно, при $n = 2$ достаточно строгой выпуклости области G и непрерывности функции ψ, заданной на ее границе [3]. При $n > 2$ условие теоремы можно ослабить до требования принадлежности границы области и функции ψ классу $C^{1+\alpha}$, $\alpha > 1 - 2/n$. Дальнейшее ослабление условий в этом направлении невозможно, как показывает следующий пример. Пусть $\xi(t) > 0$ — решение уравнения $y'' + y^{n-1} = 0$ в ε-окрестности точки $t = 0$. Обозначим через ψ значения функции

$$z(x) = \left(2 - \frac{2}{n}\right)^{1/n-1} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-2/n} \frac{\left(\sum\limits_{k>1} (x^k)^2\right)^{1-1/n}}{(\xi(x^1))^{1-2/n}} \qquad (2)$$

на границе ε-шара ω с центром в начале координат $(x = 0)$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения (1) с правой частью $\varphi \equiv 1$. Эта задача в шаре ω при граничных значениях ψ не имеет решения (по крайней мере в классе выпуклых функций). Действительно, можно показать, что функция $z(x)$, определяемая по формуле (2), является обобщенным решением задачи. По теореме единственности, задача не имеет других решений. А решение $z(x)$ не регулярно на оси x_1.

1. Пусть $z(x)$ — обобщенное решение уравнения (1) в области G с граничными значениями ψ. Обозначим через F выпуклую гиперповерхность, задаваемую решением $z(x)$. Если гиперповерхность F является строго выпуклой, то решение $z(x)$ является регулярным по теореме 1 работы [2]. Допустим, гиперповерхность F не строго выпуклая. Тогда у нее существует опорная гиперповерхность σ, у которой общая часть с F есть выпуклое множество M, содержащее более одной точки. Мы утверждаем, что каждая точка строгой выпуклости M лежит на границе F.

Пусть A — точка строгой выпуклости M, не лежащая на границе F. Проведем через A опорную плоскость α к M, имеющую с M только одну общую точку (A). Плоскость α разбивает σ на две части. Пусть σ_1 — та из них, которая не содержит M. Пусть F_1 — часть поверхности F, которая проектируется в σ_1. Гиперповерхность F_1 расположена над σ_1. Сместим плоскость α на малое расстояние в сторону M; пусть α' — обозначение плоскости α после такого смещения. Повернем гиперплоскость σ около α' на малый угол в положение σ' так, чтобы точка A была ниже σ'. Пусть F_A — та компонента разбиения F гиперплоскостью σ', которой принадлежит точка A. При достаточной близости α' к α и σ' к σ граница F_A отделена от границы F. По теореме 3 из (2) гиперповерхность F_A регулярна в окрестности точки A. Но тогда точка A является точкой строгой выпуклости F и мы приходим к противоречию (M состоит из одной точки A). Таким образом, точки строгой выпуклости M лежат на границе F. Следовательно, на F имеется прямолинейный отрезок g с концами на границе F.

Пусть g — прямолинейный отрезок на F и σ: $z = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + a_0$ — опорная гиперплоскость F вдоль этого отрезка. Функция $\bar z(x) = z(x) - a_1x^1 - \ldots - a_0$ также удовлетворяет уравнению (1). Граничные значения $\bar z$ также принадлежат C^2. Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейших рассмотрениях мы будем считать, что отрезок g расположен на оси x^1 со срединой в начале координат и координатная гиперплоскость $z = 0$ является опорной для гиперповерхности F, задаваемой решением $z(x)$.

2. Введем в рассмотрение функцию

$$z_1(x) = \xi\, u(\eta), \tag{3}$$
$$\xi = \xi(x^1), \quad \eta = \frac{1}{\xi(x^1)}\Big(\sum_{k>1}(x^k)^2\Big)^{1/2}.$$

Непосредственно проверяется, что

$$\det\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^i\,\partial x^j}\right) = -\frac{\xi''}{\xi^{n-1}}\, u''(u'\eta - u)\left(\frac{u'}{\eta}\right)^{n-2}. \tag{4}$$

В дальнейших рассмотрениях в качестве функций ξ и u мы возьмем решения уравнений

$$u''(u'\eta - u)\left(\frac{u'}{\eta}\right)^{n-2} = 1, \tag{5}$$

$$\xi'' + k_0\xi^{n-1} = 0, \tag{6}$$

k_0 — положительная постоянная, удовлетворяющая условию $k_0 < \varphi(x)$.

Отметим некоторые свойства решений уравнения (5). Будем рассматривать решения этого уравнения при $\eta \geqslant 0$ с условиями в нуле: $u(0) = \delta < 0$, $u'(0) = 0$, $u''(0) > 0$. Прежде всего замечаем, что u'' сохраняет знак. Поэтому $u(\eta)$ — выпуклая функция. Далее замечаем, что решение $u(\eta)$ неограниченно продолжается, т. е. существует при всех $\eta \geqslant 0$. Действительно, если бы решение не продолжалось за точку $\eta = \eta_0$, то при $\eta \to \eta_0$ $u' \to \infty$ и $u'' \to \infty$. Но при этом $\eta u' - u$ и u'/η ограничены снизу. А значит, по уравнению (5) u'' ограничено сверху, что противоречит $u'' \to \infty$.

Если a — положительная постоянная, то каково бы ни было $\eta_0 > 0$, при достаточно малом δ функция $a\eta^2 - u(\eta)$ обращается в нуль на отрезке $(0, \eta_0)$. Допустим противное, тогда при $\eta < \eta_0$ $a\eta^2 - u(\eta) > 0$, как бы ни было мало δ. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим функцию $u_0(\eta)$, для которой $u_0(0) = 0$, $0 < u_0(\eta) \leqslant a\eta^2$ при $0 < \eta \leqslant \eta_0$. Функция $u_0(\eta)$ удовлетворяет уравнению (5). При $\eta \to 0$ $u_0'\eta - u_0 \to 0$, а u_0'/η ограничено. Существуют сколь угодно малые η, для которых $u''(\eta) \leqslant 2a$. Если взять такое достаточно малое η, то для него

$$u_0''(u_0'\eta - u_0)\left(\frac{u_0'}{\eta}\right)^{n-2} < 1$$

вопреки уравнению (5). Мы пришли к противоречию. Итак, при некотором $\eta_1 < \eta_0$ $a\eta_1^2 - u(\eta_1) = 0$.

Пусть $2b$ — длина отрезка g на гиперповерхности F, существование которого доказано в п. 1. Возьмем в качестве $\xi(x^1)$ решение уравнения (6) на сегменте $(-b, b)$, удовлетворяющее условиям $\xi(-b)=\xi(b)=0$, $\xi(x^1)>0$ при $-b<x^1<b$. Такое решение всегда всегда существует при $n\geqslant 3$. По поводу этого решения существенно заметить, что оно представляет собой выпуклую функцию, монотонно убывающую при возрастании $|x^1|$. Пусть $\xi_0=\xi(0)$ — ее максимальное значение.

Обозначим через G_1 область, задаваемую неравенством

$$\frac{1}{\xi(x^1)}\Big(\sum_{k>1}(x^k)^2\Big)^{1/2}\leqslant \eta_1, \tag{7}$$

где η_1 определяется условием $a\eta_1^2-u(\eta_1)=0$. На границе области G_1 функция $z_1(x)$, определяемая по формуле (3), удовлетворяет неравенству

$$z_1(x)\geqslant \xi a\eta_1^2\geqslant \frac{a}{\xi_0}\sum_{k>1}(x^k)^2. \tag{8}$$

3. Пусть g: $-b\leqslant x^1\leqslant b$ — отрезок на гиперповерхности F, существование которого установлено в п. 1. Пусть B_1 и B_2 — концы отрезка g. Граница области G в окрестности точки B_1 задается уравнением вида $x^1=\chi_1(x^2,\dots,x^n)$. Аналогичным уравнением задается граница G в окрестности точки B_2: $x^1=\chi_2(x^2,\dots,x^n)$. Граница гиперповерхности F в окрестности точки B_1 задается уравнениями

$$x^1=\chi_1(x^2,\dots,x^n),\qquad z=\psi_1(x^2,\dots,x^n).$$

Аналогично задается граница F в окрестности точки B_2:

$$x^1=\chi_2(x^2,\dots,x^n),\qquad z=\psi^2(x^2,\dots,x^n).$$

Так как координатная гиперплоскость $z=0$ является опорной для F, то в точках B_1 и B_2 $\psi_1=0$, $d\psi_1=0$ и соответственно $\psi_2=0$, $d\psi_2=0$. Так как функция ψ, задающая граничные значения, по условию теоремы принадлежит классу C^2, то в окрестности точек B_1 и B_2, т. е. при достаточно малых значениях $\sum_{k>1}(x^k)^2$ имеют место неравенства

$$\psi_1\leqslant\alpha\sum_{k>1}(x^k)^2,\qquad \psi_2\leqslant\alpha\sum_{k>1}(x^k)^2, \tag{9}$$

где α — некоторое положительное число. Обозначим через Φ_1 гиперповерхность, задаваемую уравнением

$$z=\alpha\sum_{k>1}(x^k)^2 \tag{10}$$

в ε-окрестности отрезка g.

Построим выпуклую оболочку границы F и обозначим через Φ ту ее часть, которая обращена выпуклостью в сторону $z<0$. Пусть $\zeta(x)$ — выпуклая функция, задающая Φ. По свойству расположения выпуклой оболочки

$$z(x)\leqslant\zeta(x),$$

где $z(x)$ — функция, задающая F. Гиперповерхность Φ_1, задаваемая уравнением (10), благодаря неравенствам (9) расположена над выпуклой оболочкой Φ. Поэтому в некоторой окрестности G_1 отрезка g имеет место неравенство

$$z(x)\leqslant\zeta(x)\leqslant\alpha\sum_{k>1}(x^k)^2. \tag{11}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что область G_1 определяется неравенством (7); при этом из неравенств (8) и (11) получается

$$z(x) \leqslant \frac{\alpha\xi_0}{a} z_1(x). \tag{12}$$

Так как выбор постоянной a ничем не ограничен, то она могла быть заранее взята равной $\alpha\xi_0$. При этом неравенство (12) имеет вид

$$z(x) \leqslant z_1(x)$$

на границе G_1, определяемой неравенством (7).

4. Рассмотрим теперь выпуклые гиперповерхности F' и F_1', задаваемые функциями $z(x)$ и $z_1(x)$ соответствено в области G_1. Функции $z(x)$ и $z_1(x)$ обладают следующими свойствами. В начале координат O $z_1 < z$. На границе области G_1 $z_1 \geqslant z$. Обозначим через G_1' связную компоненту множества тех точек области G_1, содержащую начало координат, в которых $z_1 < z$. Множество G_1' есть область, на ее границе $z_1 = z$. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что $G_1' \equiv G$. При этом гиперповерхности F' и F_1' имеют общий край и F' расположена над F_1'. Ввиду такого расположения гиперповерхностей F' и F_1' нормальное изображение M' гиперповерхности F' содержится в нормальном изображении M_1' гиперповерхности F_1'.

Функция $z(x)$, задающая гиперповерхность F', удовлетворяет уравнению (1), а функция $z_1(x)$ является решением уравнения такого же вида, но с правой частью $k_0 < \varphi(x)$. По определению обобщенного решения

$$\int\limits_{M'} dp = \int\limits_{G_1} \varphi\, dx, \qquad \int\limits_{M_1'} dp = \int\limits_{G_1} k_0\, dx.$$

Так как $M' \subset M_1'$, то

$$\int\limits_{M'} dp \leqslant \int\limits_{M_1'} dp.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{G_1} \varphi\, dx \leqslant \int\limits_{G_1} k_0\, dx.$$

Но это невозможно, так как $k_0 < \varphi(x)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
31 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, Вестн. Ленингр. унив. № 1 (1958). [2] А. В. Погорелов, ДАН, 200, № 3 (1971). [3] А. В. Погорелов, Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, Харьков, 1960.