Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 539.3 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

И. М. РАПОПОРТ, С. М. ХЗАРДЖЯН

ДИСЛОКАЦИИ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 11 V 1971)

В континуальной теории дислокаций ([1-4]) задача о напряженном состоянии, создаваемом заданными дислокациями, доведена до расчетных формул лишь для отдельных частных видов дислокаций. В данной статье мы рассматриваем случай дислокаций типа Сомилианы, заданных в поперечном сечении бесконечного упругого цилиндра произвольной конфигурации, и даем решение задачи о возникающих напряжениях в форме разложений по собственным функциям некоторой двумерной несамосопряженной краевой задачи.

Введем в рассмотрение систему прямоугольных координат x, y, z, у которой ось z параллельна образующей упругого цилиндра. Пусть в сечении цилиндра плоскостью $z = z'$ осуществлен разрез, имеющий форму плоской фигуры S. Пусть, далее, частицам упругого цилиндра, прилегающим к разрезу S со стороны положительной полуоси z, сообщены перемещения $\mathbf{U}_+(x, y)$, а частицам, прилегающим к разрезу с противоположной стороны,— перемещения $\mathbf{U}_-(x, y)$. Будем считать заданной в плоской области S разность $\mathbf{\Phi}(x, y) = \mathbf{U}_+(x, y) - \mathbf{U}_-(x, y)$ и поставим своей задачей определение поля перемещений $\mathbf{U}(x, y, z)$, создаваемых в упругом цилиндре относительными перемещениями $\mathbf{\Phi}(x, y)$. Будем считать при этом, что в области V_0, внешней по отношению к разрезу, отсутствуют объемные силы, а на боковой поверхности цилиндра $S_б$ отсутствуют поверхностные силы. Потребуем далее, чтобы деформации упругого цилиндра стремились к нулю при $|z - z'| \to \infty$.

Искомый вектор $\mathbf{U}(x, y, z)$ должен быть непрерывным в области V_0, должен удовлетворять в этой области однородным уравнениям равновесия

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} + (1 - 2\nu) \nabla^2 \mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

на боковой поверхности цилиндра $S_б$ должны удовлетворяться однородные краевые условия

$$\sigma_{ij} n_j = 0, \quad i, j = x, y, z \tag{2}$$

(ν — коэффициент Пуассона, n — внешняя нормаль к поверхности $S_б$, σ_{ij} — компонента напряжений). В плоской области S должно выполняться условие

$$\mathbf{U}(x, y, z' + 0) - \mathbf{U}(x, y, z' - 0) = \mathbf{\Phi}(x, y). \tag{3}$$

(В формуле (2) имеется в виду суммирование по повторяющемуся индексу j.)

Напряжения должны быть непрерывными в области V_0, кроме того напряжения σ_{iz} должны оставаться непрерывными при пересечении разреза S.

Будем искать сперва упругие перемещения $\mathbf{U}$, удовлетворяющие уравнению (1) в области V_0 и краевым условиям (2) на поверхности $s_б$, в виде произведений

$$U_x = U \frac{\partial f}{\partial z}, \quad U_y = V \frac{\partial f}{\partial z}, \quad U_z = \left[\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} W - \frac{\nu}{1 - \nu}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] f, \tag{4}$$

$$f(z,\lambda)=\begin{cases}\frac{1}{2\lambda}\exp[\lambda(z'-z)] & \text{при } z<z',\\ \frac{1}{2\lambda}\exp[\lambda(z-z')] & \text{при } z>z';\end{cases} \tag{5}$$

λ — отличный от нуля числовой параметр, U, V, W — искомые функции переменных x, y и параметра λ. Подставляя (4) в (1) и (2), получим для функций U, V, W краевую задачу

$$\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{W}{2}\right)+\nabla^2U+\lambda^2U=0,$$
$$\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{W}{2}\right)+\nabla^2V+\lambda^2V=0,$$
$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\nabla^2\left[2\nu\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)-(1-2\nu)W\right]+\lambda^2\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+W\right)=0$$

внутри $S_б$;

$$(2\,\partial U/\partial x+2\nu\,\partial V/\partial y+\nu W)\cos(n,x)+(1-\nu)(\partial U/\partial y+$$
$$+\partial V/\partial x)\cos(n,y)=0,$$
$$(1-\nu)(\partial U/\partial y+\partial V/\partial x)\cos(n,x)+(2\nu\,\partial U/\partial x+$$
$$+2\,\partial V/\partial y+\nu W)\cos(n,y)=0,$$
$$[2\,\partial^2U/\partial x^2+(1-\nu)\,\partial^2U/\partial y^2+(1+\nu)\,\partial^2V/\partial x\partial y+$$
$$+\nu\,\partial W/\partial x]\cos(n,x)+[(1+\nu)\,\partial^2U/\partial x\partial y+$$
$$+(1-\nu\,\partial^2V/\partial x^2+2\,\partial^2V/\partial y^2+\nu\,\partial W/\partial y]\cos(n,y)=0 \tag{6}$$

на $S_б$.

Отыскивая перемещения в виде произведений

$$U_x=(U^*+\partial W^*/\partial x)f,\ U_y=(V^*+\partial W^*/\partial y)f,\ U_z=$$
$$=-W^*\partial f/\partial z, \tag{7}$$

получим для функций U^*, V^*, W^* краевую задачу

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x}+\nabla^2W^*\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U^*}{\partial y}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial V^*}{\partial x}\right)+$$
$$+\lambda^2\left(U^*-\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial W^*}{\partial x}\right)=0,$$
$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V^*}{\partial y}+\nabla^2W^*\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V^*}{\partial x}+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial U^*}{\partial y}\right)+$$
$$+\lambda^2\left(V^*-\frac{2\nu}{1-2\nu}\frac{\partial W^*}{\partial y}\right)=0,$$
$$-\frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial U^*}{\partial x}+\frac{\partial V^*}{\partial y}+2\nu\nabla^2W^*\right)+\lambda^2W^*=0 \text{ внутри } S_б; \tag{8}$$
$$[(2-\nu)\,\partial U^*/\partial x+\nu\,\partial V^*/\partial y+2\partial^2W^*/\partial x^2+2\nu\,\partial^2W^*/\partial y^2]\cos(n,x)+$$
$$+(1-\nu)\left(\frac{\partial U^*}{\partial y}+\frac{\partial V^*}{\partial x}+2\frac{\partial^2W^*}{\partial x\,\partial y}\right)\cos(n,y)=0,$$
$$(1-\nu)\left(\frac{\partial U^*}{\partial y}+\frac{\partial V^*}{\partial x}+2\frac{\partial^2W^*}{\partial x\,\partial y}\right)\cos(n,x)+$$
$$+\left[\nu\frac{\partial U^*}{\partial x}+(2-\nu)\frac{\partial V^*}{\partial y}+2\nu\frac{\partial^2W^*}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2W^*}{\partial y^2}\right]\cos(n,y)=0,$$
$$U^*\cos(n,x)+V^*\cos(n,y)=0 \quad \text{на } S_б.$$

Краевые задачи (6) и (8) обладают следующими свойствами:

а) обе краевые задачи имеют одинаковые отличные от нуля собственные значения λ_j^2, $j=1,2,\dots$;

б) среди чисел λ_j^2 отсутствуют вещественные отрицательные числа; для чисел λ_j, $j=1,2,\dots$, условимся принимать значения, у которых

$$\operatorname{Re}\lambda_j<0;$$

в) для обеих краевых задач нуль является собственным значением четвертой кратности. Соответствующие собственные функции для краевой задачи (6) определяются формулами

$$\begin{gathered} U=1, \quad V=0, \quad W=0; \quad U=0, \quad V=1, \quad W=0; \\ U=y, \quad V=-x, \quad W=0; \\ U=\nu x, \quad V=\nu y, \quad W=-2(1+\nu), \end{gathered} \tag{9}$$

а для краевой задачи (8) — формулами

$$\begin{gathered} U^*=0, \quad V^*=0, \quad W^*=1; \quad U^*=0, \quad V^*=0, \\ W^*=x; \quad U^*=0, \quad V^*=0, \\ W^*=y; \quad U^*=y-\partial\theta/\partial y, \quad V^*=-x-\partial\theta/\partial y, \quad W^*=\theta, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\theta(x,y)$ — функция кручения, определяемая краевой задачей $\nabla^2\theta=0$ внутри $S_б$,

$$\partial\theta/\partial n = y\cos(n,x) - x\cos(n,y) \quad \text{на } S_б; \tag{11}$$

г) собственные функции краевых задач обладают следующими свойствами биортогональности:

$$\begin{gathered} \iint_{S_0}(U_iU_k^*+V_jV_k^*+W_jW_k^*)\,dS=0 \quad \text{при } j\neq k, \iint_{S_0}W_j\,dS=0, \iint_{S_0}W_jx\,dS=0, \\ \iint_{S_0}W_jy\,dS=0, \quad \iint_{S_0}\left[U_j\left(y-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-V_j\left(x+\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)+W_j\theta\right]dS=0, \\ \iint_{S_0}U_j^*\,dS=0, \quad \iint_{S_0}V_j^*\,dS=0, \quad \iint_{S_0}(U_j^*y-V_j^*x)\,dS=0, \\ \iint_{S_0}[\nu(U_j^*x+V_j^*y)-2(1+\nu)W_j^*]\,dS=0 \quad j,k=1,2,\ldots, \end{gathered} \tag{12}$$

где S_0 — поперечное сечение упругого цилиндра.

Установив для собственных функций условия нормирования

$$\iint_{S_0}(U_jU_j^*+V_jV_j^*+W_jW_j^*)\,dS=1, \tag{13}$$

рассмотрим отдельно два случая.

1) $\Phi_z=0$ на S (случай относительных смещений в плоскости разреза S). В данном случае искомые упругие перемещения могут быть представлены в виде разложений по собственным функциям первой краевой задачи:

$$\begin{gathered} U_x=-a_0yf_0'(z)+\sum_{j=1}^{\infty}a_jU_jf_j'(z), \\ U_y=a_0xf_0'(z)+\sum_{j=1}^{\infty}a_jV_jf_j'(z), \\ U_z=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}W_j-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x}+\frac{\partial V_j}{\partial y}\right)\right]f_j(z), \end{gathered} \tag{14}$$

где $f_j(z)=f(z,\lambda_j)$, $j=1,2,\ldots$, а $f_0(z)$ — функция, определяемая как

$$f_0(z)=\begin{cases} {}^1/_2(z'-z) & \text{при } z<z', \\ {}^1/_2(z-z') & \text{при } z>z'. \end{cases} \tag{15}$$

Коэффициент a_0 определяется уравнением

$$\begin{gathered} a_0=\iint_{S_0}[x(x+\partial\theta/\partial y)+y(y-\partial\theta/\partial x)]\,dS=\iint_S[\Phi_x(\partial\theta/\partial x-y)+ \\ +\Phi_y(\partial\theta/\partial y+x)]\,dS \end{gathered} \tag{16}$$

(это уравнение всегда разрешимо, так как в нем множитель при a_0 пропорционален жесткости кручения), а коэффициенты $a_1, a_2, \ldots$ — формулой

$$a_j = \iint\limits_S (\Phi_x U_j^* + \Phi_i V_j^*)\, dS \quad \text{при } j \geqslant 1. \tag{17}$$

2) $\Phi_x = 0$, $\Phi_y = 0$ на S (случай относительных смещений в направлении, нормальном к плоскости разреза S). В этом случае искомые упругие перемещения могут быть представлены в виде разложений по собственным функциям второй краевой задачи

$$\begin{gathered} U_x = \sum_{j=1}^{\infty} b_j (U_j^* + \partial W_j^*/\partial x) f_j(z), \\ U_y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j (V_j^* + \partial W_j^*/\partial y) f_j(z), \\ U_z = b_0 f_0'(z) - \sum_{j=1}^{\infty} b_j W_j^* f_j'(z), \end{gathered} \tag{18}$$

$$b_0 = \frac{1}{s_0} \iint\limits_S \Phi_z\, dS, \quad b_j = -\iint\limits_S \Phi_z W_j\, dS, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

(s_0 — площадь поперечного сечения цилиндра S_0). Согласно (5) в обоих случаях упругие деформации убывают по экспоненциальному закону при $|z - z'| \to \infty$ (в формулах (14) и (18) слагаемые, пропорциональные $f_0'(z)$, определяют перемещения, не сопровождаемые упругими деформациями). Расчет собственных функций рассмотренных краевых задач может быть произведен в функциях Бесселя для круглого поперечного сечения, в общем случае может быть применен итерационный метод расчета собственных функций.

Всесоюзный заочный машиностроительный институт
Москва

Поступило
29 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ляв, Математическая теория упругости, М.— Л., 1935. [2] F. R. N. Nabarro, Theory of Crystal Dislocations, Oxford, 1967. [3] Дж. Эшелби, Континуальная теория дислокаций, ИЛ, 1963. [4] В. Л. Индембом, Физика кристаллов с дефектами, 1, Тбилиси, 1966.