Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 4

УДК 517.11 : (51.01 + 519.95)

МАТЕМАТИКА

М. Ф. РАЦА

КРИТЕРИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЫ В ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 V 1971)

1. Хорошо известен критерий функциональной полноты в классической логике (высказываний), обычно называемый теоремой Поста ([7]) — Яблонского ([12а, б]). Он позволяет по любой конечной системе булевых функций, заданных выражающими их формулами или таблицами, алгоритмически и притом весьма просто распознавать, является ли эта система функционально полной. Аналогичные критерии были найдены для полной трехзначной логики ([12б]) и, наконец, вообще для полных k-значных логик с любым конечным k ([10, 2]).

Иначе обстояло дело с вопросами функциональной полноты для интуиционистской логики, поскольку задается эта логика LJ не таблицами, а исчислением J — интуиционистским исчислением высказываний ([3, 11]). Исследование этих вопросов для LJ и похожих на нее логик затруднялось еще тем, что для этих логик не рассматривается общего понятия функции данной логики, а приходится иметь дело лишь с формулами. Систематическое изучение вопросов функциональной полноты для таких логик, потребовавшее прежде всего ряд терминологических уточнений, было начато А. В. Кузнецовым в ([4а]) и недавно продолжено им в ([4б]). Им же была поставлена для LJ следующая алгоритмическая проблема, обобщаемая и на иные логики: построить алгоритм, позволяющий по любой конечной системе формул распознавать, является ли она в данной логике функционально полной *.

В настоящей статье дается, по существу, решение этой проблемы — сначала для логики LJ, а затем и для всех логик, промежуточных между нею и классической **. При этом существенно используется найденный автором ранее ([9а–в]) алгоритмический критерий функциональной полноты в простейшей из этих промежуточных логик — логике Сметанича, соответствующей первой матрице Яськовского и называемой ниже коротко логикой S. Критерий тот, как было показано автором ([9г]), остается в силе и для ряда других промежуточных логик (хотя и далеко не для всех).

2. Формулы (логики высказываний) строятся обычным образом из знаков для переменных p, q, r, s, быть может, с индексами, знаков операций $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$ и скобок. Символами 1, 0, F_3, F_7, H_0, $\perp A$ и $A \sim B$ обозначаются соответственно формулы $p \supset p$, $p \& \neg p$, $\neg p \vee \neg\neg p$, $(p \supset q) \vee (q \supset p)$, $(p \supset (q \vee \neg q)) \vee (q \supset (p \vee \neg p))$, $A \vee \neg A$ и $(A \supset B) \& (B \supset A)$, а символом $A[B, C, \ldots]$ — результат подстановки в формулу A формул B, $C, \ldots$ вместо переменных $p, q, \ldots$ соответственно ([1, 4а,б, 9в]). Суперин-

* Высказывалась А. В. Кузнецовым эта проблема неоднократно, начиная с 1963—64 г., в устных выступлениях на семинарах; сформулирована в статье ([4а]) незадолго до того, как была для LJ решена (доложено автором на семинаре в Кишиневе в июне 1970 г.; хотя доказательство, данное тогда, было сложнее имеющегося теперь — вместо леммы 1 были другие леммы). Неожиданность ее решения чувствуется в том, что не поддается пока решению чуть более общая проблема: построить алгоритм, позволяющий по любым формуле A и конечной системе формул распознавать, выразима ли A в LJ через эту систему; см. об этом в ([4б]), особенно в §§ 7, 8.

** Алгебраический вариант этого результата — критерий функциональной полноты в свободной псевдобулевой алгебре — анонсируется в кратком резюме ([12]).

туиционистской логикой называется ([4а, 13, 5]) любое множество формул замкнутое относительно правил подстановки и modus ponens и содержащее все аксиомы исчисления J. Классическая логика, S и LJ являются примерами суперинтуиционистских логик. Наименьшая (по $\subseteq$) из суперинтуиционистских логик, содержащих формулу A, называется ([5]) логикой, порожденной формулой A. Псевдобулевой алгеброй называется ([8, 9а,в, 5]) система $\langle M; \&, \vee, \supset, \neg\rangle$, являющаяся по $\&$ и $\vee$ структурой (решеткой, латтицей) с относительным псевдодополнением $\supset$ и псевдодополнением $\neg$. Говорим, что формула A верна на (псевдобулевой) алгебре $\mathfrak{A}$, если $A = 1$ на $\mathfrak{A}$ (1 — наибольший элемент алгебры). Множество всех формул, верных на $\mathfrak{A}$, составляет суперинтуиционистскую логику, называемую ([5]) логикой алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначаемую символом $L\mathfrak{A}$. Псевдобулевы алгебры, диаграммы которых изображены на рис. 1, обозначаются ([5, 4б]) соответственно символами Z_5 и $Z_2 + Z_5$.

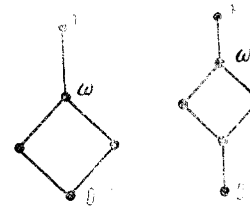

Рис. 1

Говорим, что формула F выразима в логике L через систему (формул) Σ, если F можно получить, исходя из переменных и формул системы Σ, посредством конечного числа переходов от тех или иных формул $A, B, C, \ldots$ к формуле $A[B, C, \ldots]$ (подстановка) или от A к такой B, что $(A \sim B) \in L$ (замена эквивалентным) *. Система Σ называется (функционально) полной в логике L, если в L через Σ выразимы все формулы ([4а, 6]).

3. Теорема 1. *Для того чтобы система (формул) Σ была функционально полной в LJ, необходимо и достаточно, чтобы Σ была функционально полной в LZ_5 и в $L(Z_2 + Z_5)$.*

Необходимость очевидна. Так как через систему $\{\neg p, p \& q, p \vee q, p \supset q\}$ выразимы все формулы, то достаточность вытекает из того, что, во-первых, выводимы в J эквиваленции

$$\begin{gathered} \perp p \sim ((\neg\neg p \supset p) \,\&\, (\neg p \vee \neg\neg p)), \\ (p \vee q) \sim (((p \supset q) \supset q) \,\&\, ((q \supset p) \,\&\, (\perp p \vee \perp q)), \end{gathered} \tag{1}$$

а также, во вторых, имеют место следующие три леммы.

Лемма 1. *Если система (формул) Σ полна в S, то формулы $\neg p$, $p \& q$ и $p \supset q$ выразимы в LJ через Σ* **.

Лемма 2. *Если формула A эквивалентна в LZ_5 формуле F_3 и не имеет вхождений переменных, отличных от p, то F_3 эквивалентна в LJ формуле $A[\neg p]$.*

Лемма 3. *Если формула A эквивалентна в $L(Z_2 + Z_5)$ формуле $\perp p \vee \perp q$ и не имеет вхождений переменных, отличных от p и q, то $\perp p \vee \perp q$ эквивалентна в LJ формуле $((\perp p \supset \perp q) \supset \perp q) \,\&\, ((q \supset \supset \perp p) \supset \perp p) \,\&\, A[\perp p, \perp q]$.*

4. О предикате $P(x)$ и операции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве M *** говорим, что операция f сохраняет предикат P, если для всевозможных элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ множества M из того, что истинны $P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)$, следует, что истинно $P(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. Говорим, что формула A на алгебре $\langle M; \&, \vee, \supset, \neg\rangle$ сохраняет предикат P, если операция на M, выражаемая формулой A при интерпретации на этой алгебре, сохраняет предикат P (см. ([14]), стр. 104—105, а также ([4б])).

---

* См. ([4а]); подробнее об этом (о «правилах экспрессии») см. в ([4б]).

** Эта лемма является непосредственным следствием теорем 1, 2 и 3 статьи ([4б]).

*** Операцией на M называется такая всюду определенная функция, областью значений каждого из аргументов которой является множество M и значения которой тоже принадлежат M; см. ([6], [9в], [4б]) и др.

Теорема 2. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ есть Z_5 или $Z_2 + Z_5$; тогда для того чтобы система (формул) Σ была функционально полной в $L\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы Σ была функционально полной в S и чтобы в Σ имелась формула, не сохраняющая на $\mathfrak{A}$ предикат $x \neq \omega$.*

Необходимость вытекает из того, что $L\mathfrak{A}$ включена в S, и того, что класс формул, сохраняющих на $\mathfrak{A}$ предикат $x \neq \omega$, замкнут относительно выразимости в $L\mathfrak{A}$ и не полон в $L\mathfrak{A}$.

Достаточность следует из леммы 1, лемм 4 и 5, выводимости эквиваленции (1) и того, что формула $p \vee q$ эквивалентна в LZ_5 (см. ([4б]), пример 4) формуле $((p \supset q) \supset q) \& ((q \supset p) \supset p) \& \rceil(p \& q) \supset \rceil p)$.

Лемма 4. *Формула F_3 выразима в LZ_5 через любую систему формул, содержащую 0, $\rceil p$ и некоторую формулу, не сохраняющую на алгебре Z_5 предикат $x \neq \omega$.*

Лемма 5. *Формула $p \vee q$ выразима в $L(Z_2 + Z_5)$ через любую систему формул, содержащую $\rceil p$, $q \& q$, $p \supset q$ и некоторую формулу, не сохраняющую на алгебре $Z_2 + Z_5$ предикат $x \neq \omega$.*

С помощью теоремы 2 усматриваем, например, что система $\{\rceil p, p \& q, p \supset q, F_3\}$ полна в LZ_5, а система $\{\rceil p, p \& q, p \supset q, H_0\}$ полна в $L(Z_2 + Z_5)$.

5. Из теорем 1 и 2 непосредственно следует

Теорема 3 (критерий функциональной полноты в интуиционистской логике). *Для того чтобы система (формул) Σ была функционально полной в LJ, необходимо и достаточно, чтобы Σ была функционально полной в S и чтобы в Σ существовали формула, не сохраняющая на алгебре Z_5 предикат $x \neq \omega$, и формула, не сохраняющая на алгебре $Z_2 + Z_5$ предикат $x \neq \omega$.*

Систему (формул) Σ называем (функционально) предполной в логике L, если Σ не полна в L, но для любой формулы A, не принадлежащей Σ, система $\Sigma \cup \{A\}$ полна в L. Называем формуляром класса K операций алгебры $\mathfrak{A} = \langle M; \&, \vee, \supset, \rceil \rangle$ * множество всех таких формул, которые при интерпретации на алгебре $\mathfrak{A}$ выражают операции из K. Символом $J_0, J_1 \ldots, J_9$ обозначаем соответственно формуляры классов $S_0, S_1, \ldots \ldots, S_9$ из работ ([9б, в]), а символами J_{10} и J_{11} — класс формул, сохраняющих на алгебре Z_5 предикат $x \neq \omega$, и аналогичный класс для алгебры $Z_2 + Z_5$. Заметим, что классы J_0, J_1, J_2, J_3 и J_4 являются одновременно и формулярами известных пяти предполных классов булевых функций (т. е. функций из P_2; см. ([12б])).

Теорема 4. *Существует ровно 12 функционально предполных в LJ классов формул, а именно, классы $J_0, J_1, \ldots, J_{11}$ и только они.*

6. Дальнейшие три теоремы являются следствиями теорем 3 и 4 и соответствующих теорем 13, 14 и 16 из ([9в]).

Теорема 5. *Во всякой функционально полной в LJ системе формул существует подсистема, функционально полная в LJ и содержащая не более 8 формул.*

Число 8 в этой теореме уменьшить нельзя, так как существует такая система из восьми формул, которая полна в LJ, но никакая собственная подсистема которой не является полной в LJ; например, система

$$\{0, 1, \rceil\rceil(p \& q), (p \supset q) \& \rceil\rceil q, (\rceil\rceil p \supset p) \& q, (p \sim q) \sim r), F_3 \& \rceil\rceil q, H_0 \& \rceil\rceil r\} \text{ **}.$$

Формула называется ([4а]) шефферовой в логике L, если через нее выразимы в L все формулы. Формула A называется антишефферовой в логике L, если для всякой системы Σ, полной в L, система формул из Σ, отличных от A, тоже полна в L (ср. ([9в])).

Теорема 6. *Для того чтобы формула A была шефферовой в LJ, необходимо и достаточно, чтобы A не принадлежала ни одному из следующих восьми классов: $J_0, J_1, J_2, J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}$.*

Примеры формул, шефферовых в LJ, имеются в ([4а]). Формула

$$\rceil(p \& q \& r \& s) \& (p \supset (q \vee r \vee s)) \& (q \supset (p \vee r \vee s)) \&$$

* Т. е. функций, определенных на M и выразимых через $\&$, $\vee$, $\supset$ и $\rceil$.

** Ср. с примером 3 из ([9в]).

$$\& (r \supset (p \vee q \vee s)) \,\&\, (s \supset p \vee q \vee r))$$

является примером симметрической формулы, шефферовой в LJ*.

Теорема 7. *Для того чтобы формула A была антишефферовой в LJ, необходимо и достаточно, чтобы A принадлежала одновременно всем следующим классам:* $J_2, J_3, J_4, J_5, J_9, J_{10}$ *и* J_{11}.

Примеры формул, антишефферовых в LJ: $\neg\neg p$, $p \vee \neg(p \supset q)$, $p \vee \neg\neg(p \& q)$.

7. Теорема 8. (критерий функциональной полноты в произвольной суперинтуиционистской логике). *Для того чтобы система (формул) Σ была функционально полной в суперинтуиционистской логике L, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены одновременно следующие условия: 1) если L включена в классическую логику, то Σ не включена ни в J_0, ни в J_1, ни в J_2, ни в J_3, ни в J_4; 2) если L включена в S, то Σ не включена ни в J_5, ни в J_6, ни в J_7, ни в J_8, ни в J_9; 3) если L включена в LZ_5, то Σ не включена в J_{10}; 4) если L включена в $L(Z_2+Z_5)$, то Σ не включена в J_{11}.*

Доказательство опирается на теорему 6 из [9б], теорему 3 и нижеследующую лемму 6. Говорим при этом, что логики L_1 и L_2 равны по (функциональной) полноте, если для всякой системы Σ функциональная полнота Σ в L_1 равносильна функциональной полноте Σ в L_2.

Лемма 6. *Всякая суперинтуиционистская логика L равна по полноте одной из следующих шести логик: абсолютно противоречивой, классической, S, LZ_5, $L(Z_2+Z_5)$ или LJ.*

Для доказательства этой леммы показывается с использованием следующих четырех лемм, что если логика L отлична от абсолютно противоречивой и от классической, то L равна по полноте той или другой из логик S, LZ_5, $L(Z_2+Z_5)$ и LJ в зависимости от того, какой из следующих случаев имеет место соответственно: а) $F_3 \in L$ и $H_0 \in L$, б) $F_3 \notin L$ и $H_0 \in L$, в) $F_3 \in L$ и $H_0 \notin L$, г) $F_3 \notin L$ и $H_0 \notin L$.

Лемма 7. *Логика LZ_5 равна по полноте логике, порожденной формулой H_0.*

Лемма 8. *Логика $L(Z_2+Z_5)$ равна по полноте логике, порожденной формулой F_3.*

Лемма 9. *Алгебра Z_5 изоморфно вложима в псевдобулеву алгебру $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда формула F_3 не верна на $\mathfrak{A}$.*

Лемма 10. *Алгебра Z_2+Z_5 изоморфно вложима в псевдобулеву алгебру $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда формула H_0 не верна на $\mathfrak{A}$.*

Из теоремы 8 вытекает

Следствие. *Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле $\mathfrak{A}$ и любой конечной системе формул распознавать, полна ли функционально эта система в логике, порожденной формулой A.*

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
13 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Я. Герчиу, А. В. Кузнецов, ДАН, 195, № 6, 1263 (1970). [2] Е. Ю. Захарова, В. Б. Кудрявцев, С. В. Яблонский, ДАН, 186, № 3, 509 (1969). [3] С. К. Клини, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957. [4] А. В. Кузнецов, а) ДАН, 160, № 2, 274 (1965); б) Сборн. Матем. исследования, 6, в. 4, Кишинев, 1971. [5] А. В. Кузнецов, В. Я. Герчиу, ДАН, 195, № 5, 1029 (1970). [6] А. И. Мальцев, УМН, 16, в. 3 (99), 3 (1961). [7] E. L. Post, Two-valued Iterative Systems of Mathematical Logic, Princeton, 1941. [8] H. Rasiova, R. Sikorski, The Mathematics of Metamathematics, Warszawa, 1963. [9] М. Ф. Рáца, а) VII Всесоюзн. коллоквиум по общей алгебре, резюме, Кишинев, 1965, стр. 89; б) ДАН, 168, № 3, 524 (1966); в) Сборн. Проблемы кибернетики, в. 21, 1969, стр. 185; г) Сборн. Матем. исследования, 5, в. 4, Кишинев, 1970, стр. 171; д) XI Всесоюзн. алгебраич. коллоквиум, резюме, Кишинев, 1971. [10] I. Rosenberg, C. R., 260, Groupe 1, 3817 (1965). [11] А. Черч, Введение в математическую логику, ИЛ, 1960. [12] С. В. Яблонский, а) Матем. сборн., 30 (72), 329 (1952); б) Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 51, 5 (1958). [13] В. А. Янков, ДАН, 181, № 1, 33 (1968). [14] С. А. Яновская, Математика в СССР за 40 лет (1917—1957), 1, М., 1959, стр. 13.

* Формула A называется симметрической, если при всякой перестановке входящих в нее переменных получается формула, эквивалентная A. Уменьшить в данном примере число переменных нельзя — в силу теоремы 15 из [9в].