**Доклады Академии наук СССР**
1971. Том 201, № 4

*ФИЗИКА*

В. С. СЫНАХ, А. М. ФРИДМАН, И. Г. ШУХМАН

# УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ ШАРОВОГО СКОПЛЕНИЯ ЗВЕЗД С ОТЛИЧНЫМ ОТ НУЛЯ МОМЕНТОМ ВРАЩЕНИЯ

*(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 10 V 1971)*

В работах ([1-5]) исследовалась устойчивость модели шарового скопления звезд (и сферической галактики) в виде сферически-симметричной системы вращающихся по круговым (и близким к круговым) траекториям масс (рис. 1). Рассматривались случаи как однородного ([1]), так и неоднородного распределения плотности ([2-5]). В цитируемых работах общий момент вращения системы был равен нулю. Однако, как известно из наблюдений шаровых скоплений, последние, как правило, вращаются. Поэтому естествен вопрос, устойчивы ли вращающиеся сферически-симметричные конфигурации. Обращаясь к хорошо разработанной теории устойчивости плазмы ([6]) (аналогия с которой в последние годы как плодотворно сказалась на развитии теории гравитационной устойчивости), заметим, что практически все неустойчивости плазмы обязаны присутствию стационарного магнитного поля. Как уже неоднократно подчеркивалось, кинетическое уравнение для функции распределения частиц плазмы в магнитном поле в точности совпадает с кинетическим уравнением для вращающихся гравитирующих конфигураций в собственной системе отсчета. Известен ряд неустойчивостей в плазме ([6]), расходующих на свое развитие энергию стационарного магнитного поля. По этой причине целью настоящей работы является выяснение возможности гравитационной неустойчивости, результатом развития которой явилось бы, например, замедление вращения шара как целого.

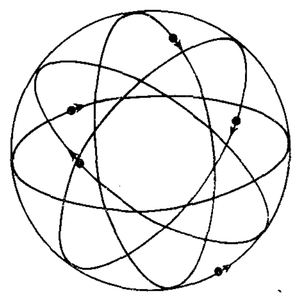

Рис. 1

Прежде всего, однако, возникает вопрос о возможности существования сферически-симметричной гравитирующей системы с отличным от нуля моментом вращения. Посмотрим на рис. 1. В работах ([1-5]) рассматривался случай, когда в плоскости, касательной к произвольной сфере в любой ее точке, все векторы скоростей частиц в сумме составляли нулевой вектор — отсутствовало вращение шара как целого. Выделим условно ось $z$ и пусть в экваториальной плоскости число частиц, вращающихся в одну сторону, превышает число частиц, вращающихся в противоположную сторону. Пусть на полюсе такое различие отсутствует (оно уменьшается при удалении от экватора). Построенная таким образом система обладает отличным от нуля моментом вращения *. Осталось доказать, что гравитационный потенциал рассматриваемой системы сферически-симметричен. Запишем предварительно исходную систему уравнений.

Пусть в единичном интервале координатно-скоростного пространства находится $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ частиц. Функция $f$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\partial f / \partial t + v\, \partial f / \partial r + \dot{v}\, \partial f / \partial v = 0, \qquad (1)$$

* Аналогичное замечание сделано ранее в ([8]) (см. также ([9])).

где $\dot{\mathbf{v}} = -\nabla\Phi$, $\Phi$ — гравитационный потенциал. Последний связан с $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ уравнением Пуассона

$$\Delta\Phi = 4\pi G n, \tag{2}$$

в котором

$$n = \int f\, d^3v, \tag{3}$$

$G$ — гравитационная постоянная, масса $m$ всех частиц выбрана равной единице.

В переменных $r$, $\theta$, $\varphi$, $v_r$, $v_\perp = (v_\theta{}^2 + v_\varphi{}^2)^{1/2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}(v_\varphi / v_\theta)$ уравнение (1) имеет вид

$$\hat{L}f + v_r\left(\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r}\frac{\partial f}{\partial v_\perp}\right) + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial v_2} - \nabla_\perp\Phi\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}_\perp} = 0, \tag{4}$$

где

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\perp}{r}\left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\alpha\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right), \tag{5}$$

$$\nabla_\perp\Phi\,\frac{\partial}{\partial v_\perp} = \frac{1}{r}\left(\cos\alpha\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \frac{1}{rv_\perp}\left(\sin\alpha\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}. \tag{6}$$

Как было сказано выше, мы интересуемся сферически-симметричным распределением плотности и потенциала. В стационарном случае $\partial/\partial t = \partial/\partial\varphi = 0$ и вместо (4) имеем

$$\frac{v_\perp}{r}\left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\alpha\operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)f_0 + v_r\left(\frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{v_\perp}{r}\,\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}\right) + \left(\frac{v_\perp^2}{r} - \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\right)\frac{\partial f_0}{\partial v_r} = 0 \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что этому уравнению удовлетворяет функция

$$f_0 = \frac{n_0}{2\pi v_0}\,\delta(v_r)\,\delta(v_\perp - v_0)\,(1 + \mu\sin\theta\sin\alpha), \qquad |\mu| \leqslant 1. \tag{8}$$

Таким образом, функция (8) описывает систему с конечным полным моментом

$$M_\varphi = \int f_0\, r\sin\theta\, v_\perp \sin\alpha\; v_\perp\, dv_\perp\, dv_r\, d\alpha\, r^2\, dr\, d\Omega \neq 0$$

и сферически-симметричным распределением плотности (и потенциала).

Рассмотрим для определенности шар с $n_0 = \mathrm{const}$. Вычислим угловую скорость вращения такого шара. Имеем

$$\langle v_\varphi\rangle \equiv \frac{1}{n_0}\int f_0 v_\varphi d^3v = {}^1/_2\,\mu\Omega\, r\sin\theta; \qquad \Omega_{\mathrm{rot}} = \mu\Omega/2. \tag{9}$$

Здесь $\Omega$ — частота обращения звезды по круговой орбите вокруг центра тяжести, $\Omega_{\mathrm{rot}}$ — частота вращения шара вокруг оси $z$. Видно, что однородный шар вращается как твердое тело.

Устойчивость описанной выше системы исследуем аналогично ([1]). Линеаризуем систему (2)—(6), обозначая равновесие величины индексом нуль, а возмущенные — индексом единица. Решение линеаризованного уравнения (4), согласно ([1]), ищем в виде

$$f_1 = A\delta_r\delta_\perp + B\delta_r\delta_\perp' - C\delta_r'\delta_\perp. \tag{10}$$

Для определения $A$, $B$, $C$ получим уравнения

$$\hat{L}^0 A - \frac{1}{r\Omega}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)B + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rC) = -\mu\sin\theta\cos\alpha\,\frac{n_0}{2\pi v_0}\,\hat{K}^0\Phi_1; \tag{11}$$

$$\hat{L}^0 B - 2\Omega\, C = \frac{n_0}{2\pi\Omega^2 r^2}\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_1\,(1 + \mu\sin\theta\sin\alpha), \tag{12}$$

$$\hat{L}^0 C + 2\Omega\, B = -\frac{n_0}{2\pi\,\Omega r}\,\Phi_1'\,(1 + \mu\sin\theta\sin\alpha), \tag{13}$$

Здесь

$$\Phi_1' \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial r},\ \hat{K}^0 = \frac{v_0}{r}\left(\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$\hat{L}^0 = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega\left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \sin\alpha\,\mathrm{ctg}\,\theta\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\right).$$

Преобразуя выражение $\cos\alpha\sin\theta\hat{K}^0\Phi_1$, получим

$$\cos\alpha\sin\theta\hat{K}^0\Phi_1 = \sin\alpha\sin\theta(\hat{L}^0 - \partial/\partial t)\Phi_1 - \Omega\,\partial\Phi_1/\partial\varphi. \tag{14}$$

Представим $A$, $B$, $C$ в виде

$$A = A_0 + A_1\mu\sin\alpha\sin\theta,\quad B = B_0 + B_1\mu\sin\alpha\sin\theta,$$
$$C = C_0 + C_1\mu\sin\alpha\sin\theta.$$

Для $A_0$, $B_0$, $C_0$ получим систему уравнений, аналогичную системе для $A$, $B$, $C$ в ([1]).

Замечая, что $\hat{L}^0\{B_1/C_1\}\sin\alpha\sin\theta = \sin\alpha\sin\theta\hat{L}^0\{B_1/C_1\}$, получим $B_1 = B_0$, $C_1 = C_0$. Согласно (14) преобразуем уравнение (11):

$$\hat{L}^0 A_1 - \frac{1}{r\Omega}\left(L^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)B_1 + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,rC =$$
$$= \frac{1}{\Omega r^2}\left[-\left(\hat{L}^0 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_1\,\frac{n_0}{2\pi v_0} + \frac{n_0}{2\pi v_0}\,\frac{1}{\sin\alpha\sin\theta}\,\Omega\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\right]. \tag{15}$$

Вычислив $A_1$ из (15), для возмущенной плотности $n_1$ получим

$$n_1 = \int_0^{2\pi}(A_0 v_0 - B_0)\,d\alpha + \mu\int_0^{2\pi}(A_1 v_0 - B_1)\sin\alpha\sin\theta\,d\alpha. \tag{16}$$

Вычисление второго интеграла в (16) сводится к вычислению интеграла ([1])

$$\int_0^{2\pi}\sum_{s'=-l}^{l} T^l_{ms'}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi,\ \theta,\ \frac{\pi}{2} + \alpha\right)e^{-is\pi}P^l_{s's}(0)\sin\alpha\sin\theta\,d\alpha = I. \tag{17}$$

Используя рекуррентные формулы для $P_{mn}{}^l(\cos\theta)$ ([7]):

$$\sin\theta\,\frac{dP^l_{mn}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} + \frac{m - n\cos\theta}{\sin\theta}\,P^l_{mn}(\cos\theta) = i\alpha_n P^l_{m,\,n-1}(\cos\theta),$$
$$\sin\theta\,\frac{dP^l_{mn}(\cos\theta)}{d(\cos\theta)} - \frac{m - n\cos\theta}{\sin\theta}\,P^l_{mn}(\cos\theta) = i\alpha_{n+1}P^l_{m,\,n+1}(\cos\theta),$$
$$\alpha_n = \sqrt{(l+n)(l-n+1)},$$

получим, что интеграл в (17)

$$I = Y^l_m(\theta,\ \varphi)\,P^l_{s0}(0)\,e^{-is\pi}\,\frac{ms}{l(l+1)}\cdot 2\pi. \tag{18}$$

Для $n_1$ окончательно имеем

$$n_1 = -n_0\sum_{s=-l}^{l}|P^l_{s0}(0)|^2\,\frac{1}{(\omega - s\Omega)^2 - 4\Omega^2}\,\Delta\Phi_1 -$$
$$-n_0\sum_{s=-l}^{l}|P^l_{s0}(0)|^2\,\frac{s}{(\omega - s\Omega)^2 - 4\Omega^2}\,\mu\,\frac{m}{l(l+1)}\,\Delta\Phi_1. \tag{19}$$

Подставив (19) в линеаризованное уравнение (3), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\Psi(x) \equiv 1 + \sum_{s=-l}^{l}\frac{3}{(x-s)^2 - 4}\left(1 + \frac{\mu m}{l(l+1)}\,s\right)|P^l_{s0}(0)|^2 = 0;\quad x \equiv \omega/\Omega. \tag{20}$$

Это уравнение можно представить в виде

$$p_1(x) / p_2(x) = 0,$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — полиномы. Действительные корни $p_1(x)$ находились численно. Их количество всегда совпадало со степенью $p_1(x)$. Следовательно, все корни дисперсионного уравнения являются действительными. Такие вычисления проводились для всех $l$ и $m$ вплоть до $l=10$ и для $\mu$ от 0 до 1 через 0,2. Заметим, что не все корни $p_1(x)$ являются корнями (20). Так, для $l=3$ при $x=\pm 1$ и для $l=4$ при $x=\pm 2$ имеется нуль первого порядка у $p_1(x)$ и одновременно нуль второго порядка у $p_2(x)$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность акад. Я. Б. Зельдовичу за интерес к работе и ценные советы.

Новосибирский государственный университет

Поступило
5 IV 1971

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Б. Михайловский, А. М. Фридман, Я. Г. Эпельбаум, ЖЭТФ, 59, 5 (11) (1970). [2] А. М. Фридман, Препринт ИЯФ 25-70, Новосибирск, 1970; Астрон. журн., 48, 926 (1971). [3] В. С. Сынах, А. М. Фридман, И. Г. Шухман, Препринт ИЯФ 21-70, Новосибирск, 1970; Астрофизика, № 3 (1971). [4] А. М. Фридман, И. Г. Шухман, Препринт ИЯФ 22-70, Новосибирск, 1970. [5] А. М. Фридман, Препринт ИЯФ 26-70, Новосибирск, 1970; Астрон. журн., 48, 320 (1971). [6] А. Б. Михайловский, Теория плазменных неустойчивостей, М., 1970. [7] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, 1958. [8] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Препринт ИПМ, № 23, 1970. [9] K. C. Freeman, Mouth. Not. of R.A.S., 134, 1 (1966).