

Ю. М. КУФТАРКОВ, А. П. ФЕЛЬЗЕНБАУМ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ
У ПОЛОГОГО БЕРЕГА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 20 XI 1970)

Рассмотрим стационарную задачу о стогах и нагонах в прибрежной зоне у пологого берега в рамках теории течений в мелком море *. Направим ось X перпендикулярно к берегу, ось Y — вдоль него, ось Z — вертикально вниз. Начало координат поместим на невозмущенной поверхности моря. Уравнения движения и граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g \frac{d\xi}{dx} + A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_0^H u \, dz = 0; \quad (2)$$

$$w = \int_z^H \frac{\partial u}{\partial x} \, dz; \quad (3)$$

$$\text{при } z = 0 \quad A_z \frac{\partial u}{\partial z} = -T_x / \rho, \quad A_z \frac{\partial v}{\partial z} = -T_y / \rho; \quad (4)$$

$$\text{при } z = H \quad u = v = 0, \quad (5)$$

u, v, w — составляющие скорости течения, ξ — отклонение поверхности моря от ее невозмущенного горизонтального положения, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность морской воды, A_z — кинематический коэффициент вертикального обмена количеством движения (принимается независящим от вертикальной координаты), H — глубина бассейна, T_x, T_y — составляющие тангенциального напряжения ветра.

Уравнения (2), (3) следуют из уравнения неразрывности. При выводе уравнения (2) учитывается наличие берега и, кроме того, как и обычно, величина ξ считается малой по сравнению с H (1). Последнее обстоятельство позволяет также сформулировать граничное условие (4) на поверхности $z = 0$.

Если считать тангенциальное напряжение ветра T зависящим только от плотности воздуха ρ_a и скорости ветра W (на высоте флюгера), а коэффициент вертикального обмена A_z — от скорости ветра W и глубины H , то из соображений размерностей сразу же получим

$$T_x = \kappa \rho_a W_x W, \quad T_y = \kappa \rho_a W_y W; \quad (6)$$

$$A_z = cWH, \quad (7)$$

где коэффициент трения κ и коэффициент c — некоторые постоянные безразмерные величины. Обычно в формулах (6), встречавшихся еще в исследованиях Экмана, принимают $\gamma = \kappa \rho_a = 3,25 \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Что же касается величины c , то она определяется из некоторых дополнительных соображений (2).

Из соотношений (1) — (5), учитывая формулы (6), (7) и вводя новые независимые переменные $\xi = x$ и $\eta = z/H$, получим

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(\frac{w}{H} - \frac{\eta u}{H} \frac{dH}{d\xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = g \frac{d\xi}{d\xi} + \frac{cW}{H} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad (8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(\frac{w}{H} - \frac{\eta u}{H} \frac{dH}{d\xi} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{cW}{H} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2};$$

* Т. е. без учета силы Кориолиса, плотностной неоднородности морской воды и горизонтального обмена количеством движения.

$$\int_0^1 u \, d\eta = 0; \quad (9)$$

$$w = H \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta}{H} \frac{dH}{d\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\eta; \quad (10)$$

$$\text{при } \eta = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\gamma}{c\rho} W_x, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{\gamma}{c\rho} W_y; \quad (11)$$

$$\text{при } \eta = 1 \quad u = v = 0. \quad (12)$$

Горизонтальные составляющие скорости течения в общем случае зависят от обеих переменных ξ и η . Мы ограничимся случаем, когда дно представляет собой наклонную плоскость ($dH/dx = s = \text{const}$), а ветер равномерный ($W_x, W_y = \text{const}$). В этом случае функции u, v можно искать в виде

$$u = \frac{\gamma}{c\rho} W \bar{u}(\eta), \quad v = \frac{\gamma}{c\rho} W \bar{v}(\eta) \quad (13)$$

(автомодельное решение).

Из уравнений (8), (10) получим

$$\frac{d^2 \psi}{d\eta^2} + \bar{s} \psi \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} = -\frac{g\rho H}{\gamma W^2} \frac{d\xi}{d\eta}, \quad (14)$$

$$d^2 \bar{v} / d\eta^2 + \bar{s} \psi d\bar{v} / d\eta = 0;$$

$$\bar{w} = s[\eta d\psi / d\eta - \psi], \quad (15)$$

где $\bar{s} = \frac{\gamma}{c^2 \rho} s$, $\bar{w} = \frac{c\rho}{\gamma W} w$ и

$$\psi = \int_1^\eta \bar{u} \, d\eta. \quad (16)$$

Левая часть первого из уравнений (14) зависит только от переменной η , а правая — от ξ . Следовательно,

$$d^2 \psi / d\eta^2 + \bar{s} \psi d^2 \psi / d\eta^2 = r; \quad (17)$$

$$-\frac{g\rho H}{\gamma W^2} \frac{d\xi}{d\eta} = r, \quad (18)$$

где r — постоянная величина, подлежащая определению.

Из граничных условий (11), (12), формулы (16) при $\eta = 0$, $\eta = 1$ и условия (9) следует

$$\text{при } \eta = 0 \quad \psi = 0; \quad (19)$$

$$d^2 \psi / d\eta^2 = -W_x / W; \quad (20)$$

$$\text{при } \eta = 1 \quad \psi = 0; \quad (21)$$

$$d\psi / d\eta = 0. \quad (22)$$

Таким образом, функция ψ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (17). Граничные условия (19) — (22) позволяют определить эту функцию и постоянную величину r . Более удобно найти решение, исключив эту константу, дифференцируя уравнение (17) по η . Получим

$$\frac{d^4 \psi}{d\eta^4} + \bar{s} \frac{d}{d\eta} \left(\psi \frac{d^2 \psi}{d\eta^2} \right) = 0. \quad (23)$$

Определив функцию ψ из уравнения (23) и условий (19) — (22), можем затем найти константу r из соотношения (17). Согласно формуле (18) эта константа определяет наклон уровня. Составляющая скорости \bar{u} определяется из формулы (16). Вдольбереговая составляющая скорости течения \bar{v} определяется из уравнений (14) и граничных условий

$$\text{при } \eta = 0 \quad d\bar{v} / d\eta = -W_y / W; \quad (24)$$

$$\text{при } \eta = 1 \quad \bar{v} = 0, \quad (25)$$

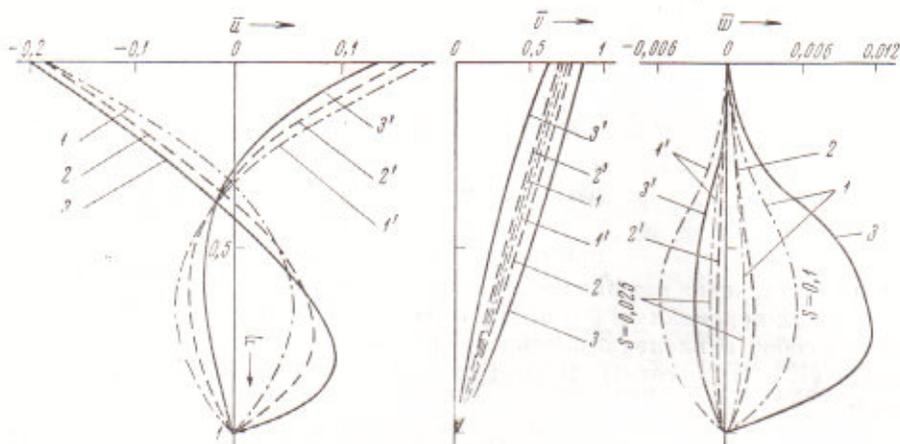


Рис. 1. Вертикальное распределение безразмерных составляющих скорости течения \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} при нагоне (1, 2, 3) и сгоне (1', 2', 3): 1, 1' — линейное решение, 2, 2' — нелинейное решение при $s = 0,025$, 3, 3' — нелинейное решение при $s = 0,1$

следующих из (11), (12). Решение имеет вид

$$\bar{v} = \frac{W_v}{W} \int_0^1 \exp\left(-\bar{s} \int_0^{\eta} \psi d\eta\right) d\eta. \quad (26)$$

Уравнение (23) при условиях (19) — (22) решается численно методом стационарирования, для чего оно заменяется уравнением

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \bar{s} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) = 0, \quad (27)$$

в котором t — фиктивное безразмерное время. Расчеты ведутся при начальном условии

$$\text{при } t=0 \quad \psi = 0 \quad (28)$$

до выхода на стационарный режим. Конечно-разностная схема следующая:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (\psi_k^j - \psi_k^{j-1}) + \frac{1}{h^2} (\psi_{k-2}^j - 4\psi_{k-1}^j + 6\psi_k^j - 4\psi_{k+1}^j + \psi_{k+2}^j) - \frac{\bar{s}}{2h^3} (\psi_{k-1}^{j-1} \psi_{k-2}^j - \\ - 2\psi_{k-1}^{j-1} \psi_{k-1}^j - \psi_{k+1}^{j-1} \psi_k^j + \psi_{k-1}^{j-1} \psi_k^j + 2\psi_{k+1}^{j-1} \psi_{k+1}^j - \psi_{k+1}^{j-1} \psi_{k-2}^j) = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где h — шаг по переменной η , τ — шаг по времени, j — номер шага по времени, k — номер рассматриваемой точки. При записи граничных условий (19) — (22) в разностной форме для лучшей аппроксимации справа и слева от рассматриваемого интервала $[0, 1]$ вводится по одной фиктивной точке. Значения искомой функции ψ в этих точках определяются с помощью уравнения (29), используемого для внутренних точек, соседних с граничными. Уравнение (29) сводится к пятиточечному и решается методом прогонки^(3, 4).

Конкретные расчеты выполнены при значении постоянной величины c , определяемой формулой⁽²⁾ $c = \gamma / (4k\rho)$, где k — среднее статистическое значение ветрового коэффициента (принимается равным 0,02). Далее полагаем $W_x = W_v > 0$ (при сгоне) и $W_x = -W_v < 0$ (при нагоне).

Результаты вычислений, проведенных при значениях $h = 0,05$ и $s = 0,025$ и $s = 0,1$, приведены на рис. 1*. На первом из них показано распределение скорости течения при нагоне, на втором — при сгоне. На рисунках показаны также результаты, соответствующие линейному реше-

* Параметр релаксации τ варьировался, причем в пределах 10^{-7} — 10^{-5} решение оказалось практически не зависящим от τ .

нию. Значения постоянной величины r , характеризующей, согласно формуле (18), наклон уровня, следующие:

	Линейное решение	$s=0,025$	$s=0,1$
Нагон	-1,07	-1,63	-3,34
Сгон	1,07	0,8	0,38

Таким образом, между нагоном и сгоном имеется существенная разница. Если в линейной задаче распределение скорости течения и наклон уровня при нагоне и сгоне одинаковые, то в нелинейной задаче при нагоне происходит заметное увеличение наклона уровня, усиление противотечения и опускание его ядра. При сгоне же, наоборот, наклон уровня значительно уменьшается, глубинное противотечение ослабляется, а его ядро поднимается ближе к поверхности моря. Распределение вертикальной составляющей скорости течения в нелинейном случае также иное, чем в линейном. Именно, по всей толще воды при нагоне вертикальная скорость возрастает, а при сгоне убывает. Отличие имеется и в скорости поверхностного течения, наиболее заметное при сгоне, когда она уменьшается.

Как известно, в линейной задаче для мелкого моря нагонный ветер не влияет на течение вдоль берега. В нелинейной же задаче, согласно полученным результатам, такое влияние имеется при наличии вдольбереговой составляющей скорости ветра.

Следует отметить, что полученное решение непригодно в окрестности берега ($x=0$), где имеется особенность (при очень малых глубинах H уровень ξ не является малой величиной по сравнению с H , не выполняется условие гидростатики и т. д.). Аналогичная особенность встречается в задаче Блазиуса об обтекании пластины вязкой жидкостью. Как и решение Блазиуса, полученное нами решение, по-видимому, не зависит от этой особенности для достаточно больших значений x .

Морской гидрофизический институт
Академии наук УССР
Севастополь

Поступило
30 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Фельзенбаум, Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений, М., 1960. ² А. И. Фельзенбаум, Тр. Инст. океанол. АН СССР, 19, 1956. ³ В. Е. Шиманский, Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, ч. 1, Линейные краевые задачи, Киев, 1963. ⁴ Э. Н. Михайлова, Н. Б. Шапиро, Морские гидрофизические исследования, № 2 (1970).