

Академик АН КиргССР М. Я. ЛЕОНОВ

ОСНОВНЫЕ ПОСТУЛАТЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Рассматривается малая макрооднородная деформация поликристаллического тела. В силу упругой анизотропии кристаллических зерен внутренние силы характеризуются некоторой неоднородностью, которая учитывается изменением сопротивления сдвигу, зависящим от тензора упругих макродеформаций (напряжений).

1°. Если пределы упругости при одноосном растяжении и сжатии одинаковы, то для такого материала справедлива

Аксиома 1. Первые скольжения происходят в плоскостях и направлениях, включающих в себя плоскости с максимальным касательным напряжением в направлении его действия.

Известно, что максимальное касательное напряжение в пределах упругости при чистом сдвиге (кручении) обычно бывает больше, чем при растяжении (сжатии). В первом случае максимальное касательное напряжение достигается только в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через заданную точку, а во втором случае они образуют бесконечную связку плоскостей, наклоненных под углом 45° к оси растяжения. Указанный факт объясняется следующим.

Аксиома 2. При возрастании любых компонент касательных напряжений во всех плоскостях приращение сопротивления сдвигу от упругих деформаций отрицательно.

Скольжение в кристаллическом зерне наиболее невыгодно ориентированном, первоначально вызовет только упругие деформации в соседних зернах. Поскольку эти деформации не учитываются, то будем считать, что элементарное скольжение изменяет сопротивление сдвигу в произвольной плоскости во всех направлениях (за исключением особых). Этот факт частично учтен в (1).

В дальнейшем рассматриваются только такие материалы, которые удовлетворяют следующему условию.

Постулат антиизотропии. При малых пластических деформациях изменение сопротивления сдвигу не зависит от последовательности скольжений.

Изотропное упрочнение и многократные знакопеременные нагрузки исключаются из рассмотрения, так как при этом происходит накопление малых эффектов частично изотропного упрочнения.

2°. Следуя Батдорфу и Будянскому (2), представим плоскость скольжения, проходящую через произвольную точку, в виде касательной плоскости к полусфере единичного радиуса (см. рис. 1). Эта плоскость определяется нормалью $n(\alpha, \beta)$. Считается, что скольжение происходит в направлении $l(\omega)$.

В результате скольжений по плоскостям с нормальми n , заключенными внутри телесного угла $d\Omega$, в направлениях l , заключенных внутри угла

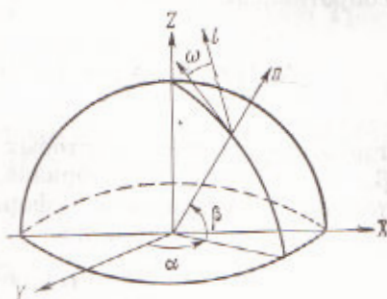


Рис. 1

$d\omega$, произойдет сдвиг

$$d\gamma_{nl} = \varphi(\alpha, \beta, \omega) d\Omega d\omega \quad (d\Omega = \cos \beta d\alpha d\beta), \quad (1)$$

где $\varphi(\alpha, \beta, \omega)$ — функция, характеризующая интенсивность скольжения в плоскости, определяемой координатами α, β , в направлении, определяемом углом ω .

Указанные скольжения вызовут самоуравновешенное напряженное состояние, которое мы учитываем изменением сопротивления сдвигу кристаллического конгломерата; т. е. в результате сдвига (1) сопротивление $S(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ сдвигу плоскости с нормалью $n_0(\alpha_0, \beta_0)$ в направлении $l_0(\omega_0)$, получит приращение

$$dS(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = K d\gamma_{nl}, \quad (2)$$

где K — функция от $\alpha, \alpha_0, \beta, \beta_0, \omega, \omega_0$ и пяти компонент девиатора напряжений.

Рассмотрим пока влияние скольжений на изменение сопротивления сдвигу в ненапряженном теле. Расчленим его на несколько слагаемых. Предположим, что с поворотом плоскости с нормалью n_0 и направления l_0 одно из них изменяется как соответствующая компонента тензора деформаций от рассматриваемого скольжения. Другое слагаемое (dS_0) считается нулем при $n_0 \neq n$, а при $n_0 = n$ будет

$$dS_0(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = F(\omega_0 - \omega) \varphi(\alpha_0, \beta_0, \omega) d\omega. \quad (3)$$

Ограничиваясь указанными слагаемыми, получим суммарное приращение сопротивления сдвигу от всех скольжений в ненапряженном теле

$$\Delta S^0(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega_0 - \omega) \varphi(\alpha_0, \beta_0, \omega) d\omega - a\gamma(\alpha_0, \beta_0, \omega_0), \quad (4)$$

где $\omega_{1,2}$ — пределы, в которых происходят скольжения, зависящие от α_0 и β_0 , a — постоянная материала, F — функция, характеризующая чувствительность материала к деформационной анизотропии, удовлетворяющая условиям антиизотропии

$$F(\theta) = F(-\theta), \quad F(\theta + \pi) = -F(\theta), \quad F(\pi/2) = 0, \quad (5)$$

т. е. ее можно представить следующим образом:

$$F(\theta) = a_1 \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + a_5 \cos 5\theta + \dots \quad (6)$$

Случай, когда F представляет δ -функцию Дирака

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2n+1} = \dots \quad (7)$$

рассмотрен Батдорфом и Будянским ⁽²⁾ при $a=0$, т. е. когда учитывается упрочнение только в направлении скольжения. Другие простейшие предположения (изотропное упрочнение в плоскости скольжения) относительно функции F делаются Малмейстером ⁽³⁾ тоже при $a=0$.

3°. Приращение сопротивления сдвигу от упругих деформаций в соответствии с аксиомой 2 представим в виде

$$\Delta S^y(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = -k\tau_t - c[\tau_m - \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)] \quad (k, c = \text{const} > 0), \quad (8)$$

где τ_m — максимальное касательное напряжение, $\tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ — компонента касательного напряжения в той же плоскости и направлении, в которых ищется изменение сопротивления сдвигу, τ_t — интенсивность касательных напряжений, k — коэффициент, определяемый из эксперимента следующим образом. Пусть τ_p — максимальное касательное напряжение при растяжении в момент достижения предела упругости, τ_k — предел упругости при чистом сдвиге. Из аксиомы 1 следует, что τ_p и τ_k являются

сопротивлениями сдвигу при достижении предела упругости, когда $\tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = \tau_m$. Их разность, согласно формуле (8), будет $k(\tau_i^k - \tau_i^p)$, где τ_i^p, τ_i^k — интенсивности касательных напряжений в момент достижения предела упругости при растяжении и кручении соответственно. Следовательно,

$$k = (\tau_k - \tau_p) / \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \tau_p - \sqrt{\frac{2}{3}} \tau_k \right). \quad (9)$$

Относительно другой постоянной материала (c), входящей в формулу (8), можно сделать ряд общих замечаний. Для этого воспользуемся следующим следствием аксиомы 1.

Лемма 1. *Условия для скольжения не могут возникать в плоскостях, где касательные напряжения не являются максимальными, до того момента, пока не произойдут скольжения в наиболее напряженной плоскости.*

Пусть задано некоторое напряженное состояние. Будем изменять напряжение $\tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$ только за счет изменения углов $\alpha_0, \beta_0, \omega_0$. При этом сопротивление сдвигу уменьшится по сравнению с его максимальным значением на величину $c[\tau_m - \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)]$. Согласно лемме 1, должно быть

$$c[\tau_m - \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)] < \tau_m - \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0), \quad c < 1. \quad (10)$$

Предельный случай $c = 1$ означает, что при достижении предела упругости условия пластичности достигаются одновременно во всех направлениях; будем считать, что это имеет место при $k = \infty$ (условие пластичности Губера). Другой предельный случай $c = 0$ означает, что сопротивление сдвигу не зависит от напряжений; это соответствует условию Треска ($k = 0$). Указанным условиям можно удовлетворить, полагая

$$c \approx k / (1 + k). \quad (11)$$

4°. Предел упругости можем найти, воспользовавшись формулой (8) при $\tau_m = \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = S'(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$. При этом максимальное касательное напряжение представится в виде

$$\tau_m = T - k\tau_i, \quad (12)$$

где T — постоянная данного материала, которую найдем, используя известное сопротивление сдвигу (τ_k) при кручении и соответствующую интенсивность касательных напряжений ($\tau_i = \tau_k \sqrt{2/3}$). Подставляя $\tau_m = \tau_k$ в формулу (12), получим

$$T = \tau_k (1 + k\sqrt{2/3}). \quad (13)$$

Представим сопротивление сдвигу в виде

$$S(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = \left[T + \int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega_0 - \omega) \varphi(\alpha_0, \beta_0, \omega) d\omega - a\gamma(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) \right] \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{k}{T} \tau_i - \frac{c}{T} [\tau_m - \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)] \right\}. \quad (14)$$

В направлении скольжения оно должно равняться касательному напряжению $\tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)$, т. е.

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} F(\omega_0 - \omega) \varphi(\alpha_0, \beta_0, \omega) d\omega = a\gamma(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) + \\ + \frac{\tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)}{1 - \frac{k}{T} \tau_i - \frac{c}{T} [\tau_m - \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0)]} - T. \quad (15)$$

По формулам преобразования компонент тензора деформаций имеем

$$\gamma(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) = f_x e_x + f_y e_y + f_z e_z + f_{xy} \gamma_{yx} + f_{yz} \gamma_{yz} + f_{zx} \gamma_{zx} \quad (16)$$

$e_x = \iiint l_x n_x \varphi(\alpha, \beta, \omega) d\Omega d\omega, \dots, \gamma_{xz} = \iiint (l_x n_z + l_z n_x) \varphi(\alpha, \beta, \omega) d\Omega d\omega$, где направляющие косинусы $l_x, \dots, n_z$ зависят известным образом от α, β, ω , а функции $f_x, \dots, f_{zx}$ от $\alpha_0, \beta_0, \omega_0$.

Следовательно, определение компонент пластической деформации сводится к решению интегрального уравнения (15), где правая часть зависит от этих компонент как от параметров, а область значений $\alpha_0, \beta_0, \omega_0$, в котором оно удовлетворяется (т. е. где происходят скольжения в данный момент времени), подлежит определению вместе с пределами интегрирования ω_1 и ω_2 .

Далее рассмотрим только такие упрочняющиеся материалы, для которых справедливо следующее утверждение.

Постулат. Интенсивность скольжения (φ) *является однозначной и непрерывной функцией углов* (α, β, ω).

Из этого постулата следует

$$F(0) = \infty, \quad \varphi(\alpha_0, \beta_0, \omega_k) = 0, \quad k = 1; 2. \quad (17)$$

Последнее условие определяет пределы интегрирования (ω_1, ω_2).

Область, в которой в данный момент не происходят скольжения, определяется условием

$$S(\alpha_0, \beta_0, \omega_0) > \tau(\alpha_0, \beta_0, \omega_0). \quad (18)$$

Задачи, аналогичные указанной, рассматривались в (¹, ⁴, ⁵).

Автор выражает благодарность К. Н. Русинко за всестороннюю помощь в данной работе.

Институт физики и математики
Академии наук КиргССР
Фрунзе

Поступило
8 IV 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Я. Леонов, Н. Ю. Швайко, ДАН, 159, № 5 (1964). ² С. Батдорф, Б. Будянский, Сборн. пер. и обзоров иностранной периодической литературы, № 1, 1962. ³ А. К. Малмейстер, Упругость и неупругость бетона, Рига, 1957. ⁴ М. Я. Леонов, Н. Ю. Швайко, ДАН, 171, № 2 (1966). ⁵ Н. Ю. Швайко, Ю. В. Клышевич, Б. А. Рычков, Сборн. Пластичность и хрупкость, Фрунзе, 1967.