Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 519.48 *МАТЕМАТИКА*

Академик АН МССР В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю. М. РЯБУХИН

ВПОЛНЕ ИДЕМПОТЕНТНЫЕ КОЛЬЦА И ОБОБЩЕННЫЙ НИЛЬ-РАДИКАЛ

В настоящей заметке вводятся и изучаются вполне идемпотентные кольца, являющиеся обобщением булевых колец. Доказывается, что в классе всех ассоциативных колец существует вполне идемпотентный радикал (в смысле ([1])), являющийся дополнительным к обобщенному ниль-радикалу. Рассматриваются только ассоциативные кольца. Под идеалом всегда понимается двусторонний идеал соответствующего кольца. Символом $(x)_K$ обозначим главный идеал кольца K, порожденный элементом $x \in K$. Кольцо K назовем вполне идемпотентным, если для любого элемента $x \in K$

$$(x^2)_K = (x)_K. \tag{1}$$

Примерами вполне идемпотентных колец могут служить булевы кольца, строго регулярные кольца, простые кольца без нильпотентных элементов (без делителей нуля), прямые суммы указанных колец и др.

Ясно, что любой гомоморфный образ вполне идемпотентного кольца сам является вполне идемпотентным кольцом. Кроме того, легко видеть, что во вполне идемпотентных кольцах верно равенство

$$(a^n)_K = (a)_K, \tag{2}$$

для любого элемента a и любого натурального $n \geqslant 1$. Поэтому все вполне идемпотентные кольца не имеют нильпотентных элементов.

Лемма 1. *Пусть K — вполне идемпотентное кольцо. Тогда*

$$(ab)_K = (ba)_K, \tag{3}$$

$$(abc)_K = (acb)_K, \tag{4}$$

для любых элементов a, b, $c \in K$.

Действительно, $(ab)_K = (abab)_K \subseteq (ba)_K$ в силу (1), и потому верно равенство (3). Из (2) и (3) получаем $(abc)_K = (bca)_K \supseteq (acbcacb)_K = ((acb)^2c)_K \supseteq ((acb)^2cb)_K = (cb(acb)^2)_K \supseteq ((acb)^3)_K = (acb)_K$, и потому верно равенство (4).

Теорема 1. *Кольцо K вполне идемпотентно тогда и только тогда, когда*

$$(ab)_K = (a)_K \cap (b)_K, \tag{5}$$

для любых a, $b \in K$.

Ясно, что равенство (5) влечет (1). Достаточно положить $x = a = b$. Пусть теперь кольцо K вполне идемпотентно и $x \in (a)_K \cap (b)_K$. Тогда $x^3 \in (a)_K{}^3 \subseteq KaK$ и $x^3 \in (b)_K{}^3 \subseteq KbK$. Следовательно, $x^6 \in KaKbK$, т. е. $x^6 = \sum u_i a v_i b w_i$ для подходящих элементов u_i, v_i, $w_i \in K$. Рассматривая любое произведение $uavbw$ и применяя лемму 1, получаем $(uavbw)_K = (wuab)_K = (wuabv)_K \subseteq (ab)_K$. Следовательно, $x^6 \in (ab)_K$, и потому в силу (2) $(x)_K = (x^6)_K \subseteq (ab)_K$. Но тогда $(a)_K \cap (b)_K \subseteq (ab)_K$ в силу произвольности выбора элемента x. Так как обратное включение очевидно, то верно равенство (5).

Следствие 1. *Пусть кольцо K вполне идемпотентно. Тогда для любого конечного множества элементов a_i из K*

$$(a_1a_2\ldots a_n)_K = (a_1)_K(a_2)_K\ldots(a_n)_K = \bigcap_{i=1}^{n}(a_i)_K.$$

Теорема 2. *Кольцо K вполне идемпотентно тогда и только тогда, когда любой гомоморфный образ кольца K не имеет нильпотентных элементов. Более того, для любого кольца K равносильны утверждения:*

а) *кольцо K вполне идемпотентно;*

б) *если $\bar{K}$ — подпрямо неразложимое кольцо, являющееся гомоморфным образом кольца K, то $\bar{K}$ — кольцо без делителей нуля;*

в) *любой гомоморфный образ кольца K представим в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец без делителей нуля.*

Доказательство. Из равенства (2) следует, что в любом гомоморфном образе вполне идемпотентного кольца нет нильпотентных элементов. Обратно, если любой гомоморфный образ кольца K не имеет нильпотентных элементов, то для любого $a \in K$ из равенства $\bar{a}^2 = 0$, где $\bar{a}$ — образ элемента $a \in K$ в фактор-кольце $\bar{K} = K / (a^2)_K$, получаем $\bar{a} = 0$, т. е. $a \in (a^2)_K$. Но тогда $(a)_K = (a^2)_K$ и потому кольцо K вполне идемпотентно.

а) $\Rightarrow$ б). Пусть кольцо K вполне идемпотентно, $\bar{K}$ — подпрямо неразложимое кольцо, являющееся гомоморфным образом кольца K. Тогда $\bar{K}$ — вполне идемпотентно и, в силу теоремы 1, если $\bar{b}$ и $\bar{c}$ — ненулевые элементы кольца $\bar{K}$, то $(\bar{b}\bar{c})_K = (\bar{b})_K \cap (\bar{c})_K \neq 0$ и потому $\bar{b}\bar{c} \neq 0$. Следовательно, $\bar{K}$ — кольцо без делителей нуля.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $\bar{K}$ — любой гомоморфный образ кольца K. В силу теоремы Биркгофа, $\bar{K}$ можно представить в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец $\bar{K}_\alpha$. Каждое $\bar{K}_\alpha$ является гомоморфным образом кольца K и потому не имеет делителей нуля по условию б).

в) $\Rightarrow$ а). Всякая подпрямая сумма колец без делителей нуля всегда является кольцом без нильпотентных элементов. Поэтому в силу условия в) всякий гомоморфный образ $\bar{K}$ кольца K не имеет нильпотентных элементов. Согласно доказанному выше, кольцо K вполне идемпотентно.

Следствие 2. *Кольцо K вполне идемпотентно тогда и только тогда, когда любой его идеал является пересечением вполне простых идеалов.*

Достаточно вспомнить, что идеал P кольца K называется вполне простым, если K / P — кольцо без делителей нуля.

Напомним, что кольцо K называется наследственно идемпотентным, если $(a)_K = (a)_K^2$ для любого $a \in K$, или, что то же самое, $A = A^2$ для любого идеала A из K (см. ([2–5])). Ясно, что любое вполне идемпотентное кольцо наследственно идемпотентно, так как всегда верно включение $(a^2)_K \subseteq (a)_K^2 \subseteq (a)_K$. Обратное утверждение не верно, как показывает пример кольца матриц F_n порядка $n \geqslant 2$ над произвольным полем или телом F. Легко видеть, что наследственно идемпотентное кольцо K вполне идемпотентно тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из равенств (3), (4) для любых элементов a, b.

Действительно, если кольцо K вполне идемпотентно, то верны оба равенства (3) и (4). Обратно, если верно хотя бы одно из равенств (3), (4) и кольцо K наследственно идемпотентно, то для любых a, $x \in K$ получим $(axa)_K = (a^2x)_K \subseteq (a^2)_K$. Но тогда $KaKaK \subseteq (axa)_K \subseteq (a^2)_K$ и потому $(a)_K = (a)_K^5 \subseteq KaKaK \subseteq (a^2)_K$, т. е. кольцо K вполне идемпотентно.

Напомним, что кольцо K называется строго регулярным, если для любого $a \in K$ существует такой $x \in K$, что $a = a^2x$. Ясно, что всякое строго регулярное кольцо вполне идемпотентно. Обратное не верно, так как существуют простые кольца без делителей нуля, не являющиеся строго регулярными кольцами. Легко видеть, что кольца K вполне идемпотентно тогда и только тогда, когда для любого $a \in K$ существуют такие u_i, $v_i \in K$, что $a = \sum u_i a^2 v_i$. Это показывает, что вполне идемпотентные кольца являются, в некотором смысле, двусторонним аналогом строго регулярных колец. В коммутативном случае понятия наследственно идемпотентного, вполне идемпотентного и строго регулярного колец совпадают.

Кольцо K называется регулярным в смысле Неймана, если для любого $a \in K$ существует такой $x \in K$, что $a = axa$. Ясно, что существуют вполне идемпотентные не регулярные кольца. Такими будут, например, простые кольца без делителей нуля, не являющиеся телами. Обратно, рассмотренные выше кольца матриц F_n с $n \geqslant 2$ будут регулярными, но не вполне идемпотентными кольцами. Легко видеть, что кольцо K строго регулярно тогда и только тогда, когда оно регулярно и вполне идемпотентно.

Достаточно вспомнить, что строго регулярные кольца — это в точности регулярные кольца без нильпотентных элементов.

Мы будем понимать под радикалом произвольного кольца K наследственный радикал в смысле работы ([3]), т. е. такой идеал $r(K)$ кольца K, что выполнены требования

I. $r(K/r(K)) = 0$;

II. $\varphi(r(K)) \subseteq r(\varphi(K))$ для любого гомоморфизма φ кольца K;

III. $r(A) = A \cap r(K)$ для любого идеала A кольца K.

Напомним, что кольцо K называется r-радикальным, если $K = r(K)$, и r-полупростым, если $r(K) = 0$. Кольцо K называется сильно r-полупростым, если любой его гомоморфный образ r-полупрост. Пусть s и r — два радикала, причем $s(K) \cap r(K) = 0$ для любого кольца K. Если s — наибольший среди всех радикалов, имеющих нулевое пересечение с r в любом кольце K, то s называется дополнительным к радикалу r и обозначается символом r'. Если существуют r' и $r'' = (r')'$, причем $r(K) = r''(K)$ для любого кольца K, то r называется двойственным радикалом.

Радикал r называется наднильпотентным, если все нильпотентные кольца r-радикальны, и подыдемпотентным, если все r-радикальные кольца наследственно идемпотентны.

Предложение 1 (см. ([3]), теорема 9.2). *Если r — наднильпотентный радикал, то существуют радикалы r' и r'', причем r' и r'' взаимно дополнительны, r' — двойственный подыдемпотентный радикал, r'' — двойственный наднильпотентный радикал, r' — радикальные кольца — это в точности сильно r-полупростые кольца.*

Применим предложение 1 к обобщенному ниль-радикалу (см. ([6]), стр. 153, и ([7])). Напомним, что обобщенным ниль-радикалом $N_g(K)$ кольца K называется пересечение всех его вполне простых идеалов. Идеал $N_g(K)$ является наименьшим среди всех таких идеалов Q кольца K, что фактор-кольца K/Q не имеют нильпотентных элементов. Поэтому N_g — наднильпотентный радикал и N_g — полупростые кольца — это в точности кольца без нильпотентных элементов, т. е. подпрямые суммы колец без делителей нуля ([7]). Из сказанного и предложения 1 следует существование дополнительного к N_g подыдемпотентного радикала N_g'. N_g'-радикальные кольца — это сильно N_g-полупростые кольца, т. е. кольца, любой гомоморфный образ которых не имеет нильпотентных элементов. В силу теоремы 2 это в точности вполне идемпотентные кольца. Итак, верна

Теорема 3. *В любом кольце K существует наибольший вполне идемпотентный идеал $N_g'(K)$, причем N_g' — подыдемпотентный радикал. Идеал A кольца K вполне идемпотентен тогда и только тогда, когда $A \subseteq N_g'(K)$. Для любого идеала B кольца K верно равенство $N_g'(B) = B \cap N_g'(K)$.*

Следствие 3. *Всякий идеал и любой гомоморфный образ вполне идемпотентного кольца сами являются вполне идемпотентными кольцами. Расширение вполне идемпотентного кольца при помощи вполне идемпотентного само вполне идемпотентно. В любом кольце K сумма любого множества вполне идемпотентных идеалов сама будет вполне идемпотентным идеалом.*

Лемма 2. *Пусть B — идеал кольца K, A — непустое подмножество в B, A_B и A_K — идеалы в кольцах B и K соответственно, порожденные множеством A. Если $A_B^2 = A_B$ или $A_K^2 = A_K$, то $A_B = A_K$. Более того, равенства $A_B^2 = A_B$, $A_K^2 = A_K$ равносильны.*

Действительно, в любом ассоциативном кольце верны включения $A_B \subseteq A_K$ и $A_K^3 \subseteq A_B$ (см. ([6]), стр. 107). Если $A_B^2 = A_B$, то $A_B = A_B^3 \subseteq$ $\subseteq A_K^3 \subseteq A_B$ и потому $A_B = A_K^3$. Но тогда A_B — идеал в K, т. е. $A_B = A_K$. Поэтому $A_K^2 = A_B^2 = A_B = A_K$. Если же $A_K^2 = A_K$, то $A_K = A_K^3 \subseteq A_B$ и потому $A_B = A_K$. Но тогда $A_B^2 = A_K^2 = A_K = A_B$.

Следствие 4. *Всякий идеал наследственно идемпотентного кольца является идеалом и в любом его расширении.*

Предложение 2.

$$N_g'(K) = \{a \mid a \in K \quad \forall x \in (a)_K, (x^2)_K = (x_K\} \equiv \mathfrak{M}.$$

Действительно, если $a \in N_g'(K)$ и $x \in (a)_K$, то $x \in N_g'(K)$ и потому $(x^2)_K = (x^2)_{N_g'} = (x)_{N_g'} = (x)_K$ в силу леммы 2 и следствия 3. Но тогда $a \in \mathfrak{M}$, т. е. $N_g'(K) \subseteq \mathfrak{M}$. Обратно, пусть $a \in \mathfrak{M}$. Тогда $(x^2)_K = (x)_K$ для любого $x \in (a)_K$ и потому $(x^2)_{(a)}{}^K = (x)_{(a)}$ в силу леммы 2. Следовательно, $(a)_K$ — вполне идемпотентный идеал кольца K, т. е. $a \in (a)_K \subseteq N_g'(K)$.

Предложение 3. *Если $K \neq N_g'(K)$, то $N_g'(K) = \bigcap T_\alpha$, где T_α — такие идеалы кольца K, что K / T_α — подпрямо неразложимые кольца, имеющие ненулевые нильпотентные элементы.*

Действительно, пусть $D = \bigcap T_\alpha$. Ясно, что $N_g'(K) \subseteq D$, так как $N_g'(K / T_\alpha) = 0$ для всех T_α. Покажем теперь, что $D \subseteq N_g'(K)$, т. е. D — вполне идемпотентный идеал кольца K. Допустим, что это не так, т. е. что кольцо D не вполне идемпотентно. Тогда существует такой элемент $a \in D$, что $a \notin (a^2)_D$. Но тогда в силу леммы 2 $a \notin (a^2)_K$. По лемме Куратовского — Цорна среди всех идеалов кольца K, содержащих идеал $(a^2)_K$ и не содержащих элемента a, существует максимальный идеал T. Ясно, что фактор-кольцо K / T подпрямо неразложимо и имеет нильпотентный элемент $\bar{a} = a + T$. По определению, $D \subseteq T$. С другой стороны, $D \not\subseteq T$, так как $a \in D$. Полученное противоречие показывает, что D — вполне идемпотентный идеал кольца K, т. е. $D \subseteq N_g'(K)$.

Следствие 5. *N_g'-полупростые кольца совпадают с подпрямыми суммами подпрямо неразложимых колец, имеющих ненулевые нильпотентные элементы.*

Согласно предложению 1, существует наднильпотентный радикал N_g''. N_g''-радикальные кольца — это сильно N_g'-полупростые кольца, т. е. кольца, любой гомоморфный образ которых представим в виде подпрямой суммы подпрямо неразложимых колец, имеющих нильпотентные элементы. Можно показать, что N_g''-полупростые кольца — это в точности подпрямые суммы подпрямо неразложимых колец без делителей нуля. Легко видеть, что класс всех N_g-полупростых колец строго содержит класс всех N_g''-полупростых колец. Действительно, кольцо $K \subseteq \Phi\{x\}$ всех формальных степенных рядов без свободного члена над произвольным полем Φ будет N_g''-радикальным кольцом без делителей нуля. Из сказанного следует, что $N_g'' \supseteq N_g$, но $N_g'' \neq N_g$.

В заключение отметим, что в случае колец, не обязательно ассоциативных, справедлива.

Теорема 4 (см. ([8])). *Следующие утверждения равносильны для любого кольца K:*

1) *для любых $x, y \in K$ верно равенство*

$$(xy)_K = (x)_K \cap (y)_K;$$

2) *для любых $x, y, z \in K$ справедливы равенства*

$$(xy \cdot z)_K = (x \cdot yz)_K, \qquad (x^2)_K = (x)_K;$$

3) *любое фактор-кольцо кольца K есть подпрямая сумма колец без делителей нуля.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 и леммы 1.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
6 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош, Матем. сборн., 33 (75), № 1, 13 (1953). [2] R. L. Blair, Trans. Math. Soc., 75, 136 (1953). [3] В. А. Андрунакиевич, Матем. сборн., 44 (86), № 2, 179 (1958). [4] В. А. Андрунакиевич, Матем. сборн., 55 (97), № 3, 329 (1961). [5] R. C. Courter, Canad. Math. Bull., 12, № 4, 417 (1969). [6] N. J. Divinsky, Rings and Radicals, London, 1965. [7] В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, ДАН, 180, № 1, 9 (1968). [8] В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин, Всесоюзн. алгебраический коллоквиум, Резюме сообщений и докладов, Кишинев, 1971, стр. 110.