Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 519.24

МАТЕМАТИКА

Т. АРАК

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ ОЦЕНКИ СПЕКТРА ГАУССОВСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 17 V 1971)

1°. Пусть $x(k)$ — вещественная стационарная гауссовская случайная последовательность с нулевым средним, имеющая спектральную плотность $f(\lambda)$. Рассмотрим последовательность оценок

$$\hat{F}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^\lambda \Big|\sum_{k=1}^n e^{-ik\nu}x(k)\Big|^2 d\nu$$

для ее спектральной функции $F(\lambda) = \int_0^\lambda f(\nu)\,d\nu.$

Положим $\xi_n(\lambda) = \sqrt{n}\,(\hat{F}_n(\lambda) - F(\lambda))$, $\Psi_n(a) = P\{\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi}|\xi_n(\lambda)| < a\}$ и $\Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^a e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

Из результатов [1-3] следует, что если $f(\lambda)\in L_2$ и $F(\lambda)$ не имеет интервалов постоянства, то

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_n(a) = \Phi_1\left(\frac{a}{\alpha}\right),$$

где

$$\Phi_1(a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k[\Phi((2k+1)a) - \Phi((\alpha_k-1)a)],$$

$$\alpha^2 = 2\pi\int_0^\pi f^2(\lambda)\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}\xi_n(\pi).$$

В настоящей заметке приводится оценка уклонения Ψ_n от Φ_1.

Теорема. *Пусть для некоторого* p $(2 < p \leqslant \infty)$ $f(\lambda)\in L_p$. *Тогда*

$$|\Psi_n(a\sqrt{D\xi_n(\pi)}) - \Phi_1(a)| \leqslant \omega\left(\frac{a}{3}, C_0\frac{\|f\|_{L_p}}{\sqrt{D\xi_n(\pi)}}\,n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\ln(n+1)\right),$$

где

$$\omega(z,w) = \begin{cases} we^{-z^2}, & wz\leqslant 1,\\ we^{-\frac{z}{w}}, & wz\geqslant 1.\end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем буква C с индексами служит для обозначения абсолютных постоянных.

2°. Сначала сформулируем одну лемму о распределении случайных величин вида

$$Y = \sum_j (\tau_j (X_j^2 - 1) + y_j X), \tag{1}$$

где X_j — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и с единичной дисперсией.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{D}Y = 1$ *и* $S \subset R_1$.

Тогда а) $\mathbf{E}e^{hY} \leqslant e^{h^2}$ *при* $h < 1 / (C_1 \max_k |\tau_k|)$,

б) $|\mathbf{P}\{Y \in S\} - \int_S d\Phi(a)| \leqslant \omega(\rho(0, \partial S)/2, C_1' \max_k |\tau_k|)$, *где* ρ — *эвклидово расстояние.*

Утверждение б) доказывается при помощи оценки расстояния в L_2 между характеристическими функциями от комплексного аргумента, если $2\max \tau_k^2 < \sum \tau_k^2$, или непосредственной оценкой расстояния в L_1 с весом e^{hx} между плотностями, если $2\max \tau_k^2 \geqslant \sum \tau_k^2$.

3°. Представим $x(k)$ в виде стохастического интеграла $x(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} dZ(\lambda)$.

Пусть Q — самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта в пространстве функций $L_2(f)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi)_f = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\psi f \, d\lambda$.

Символом $[QdZ, dZ]$ будем обозначать случайную величину $\sum \tau_k(|\int \varphi_k(\lambda) dZ(\lambda)|^2 - 1)$, где φ_k — о.н. базис из собственных функций Q, а τ_k — соответствующие собственные числа.

Обозначим через K_n интегральный оператор с ядром $\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} e^{-ik(\lambda-\mu)}$ и через I_ν — оператор умножения на характеристическую функцию интервала $[-\nu, \nu]$.

В введенных обозначениях

$$\xi_n(\nu) - E\xi_n(\nu) = \frac{\pi}{\sqrt{n}} [K_n I_\nu K_n dZ, dZ].$$

Наряду с процессом $\xi_n(\lambda)$ рассмотрим процесс

$$\eta_n(\nu) = \frac{\pi}{\sqrt{n}} [I_\nu K_n I_\nu dZ, dZ].$$

Для доказательства теоремы сначала оценим уклонение функции распределения величины $\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant \pi} |\eta_n(\lambda)|$ от Φ_1. Будем считать, что $\mathbf{D}\xi_n(\pi) = \mathbf{D}\eta_n(\pi) = 1$. Заметим, что условное распределение величины $\eta_n(\pi) - \eta_n(\nu)$ при данном $\{dZ(\lambda), |\lambda| < \nu\}$ совпадает с распределением случайной величины вида (1), где

$$\max|\tau_k| \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n}} \|(I - I_\nu) K_n ((I - I_\nu)\|_f \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{n}} \|K_n\|_f,$$

а $\|\cdot\|_f$ — норма оператора в $L_2(f)$. Оценивая при помощи леммы 1 и неравенства

$$\|K_n\|_f \leqslant \frac{4}{\pi} \|f\|_{L_p} n^{1/p} \tag{2}$$

уклонение упомянутых условных распределений от нормального, приходим к следующей лемме.

Лемма 2. *Существует такая постоянная* C_δ, *что если* $\delta > C_\delta \|f\|_{L_p} n^{-1/2+1/p}$ *и* $a > 2\delta$, *то*

$$|\mathbf{P}\{\max_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} |\eta_n(\lambda)| \geqslant a\} - 2\mathbf{P}\left\{\eta_n(\pi) \in \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} [(4k+1)a, (4k+3)a]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathbf{P}\{\eta_n(\pi) \in T_a^\delta\},$$
$$T_a^\delta = [-a-\delta, -a+\delta] \cup [a-\delta, a+\delta].$$

Применяя лемму 1 для $\eta_n(\pi)$ и неравенство (2), из леммы 2 получим

Следствие 1.

$$|\mathbf{P}\{\max_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} |\eta_n(\lambda)| < a\} - \Phi_1(a)| \leqslant \omega\left(\frac{a}{2},\ C_2\|f\|_{L_p} n^{-1/2+1/p}\right).$$

Оценим теперь величину $\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} |\eta_n(\lambda) - \xi_n(\lambda)|$.

Лемма 3. *Существует такая постоянная* C_γ, *что если*

$$\gamma = C_\gamma \|f\|_{L_p} \ln(n+1)\, n^{-1/2+1/p},$$

то

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} E\xi_n(\lambda) \leqslant \gamma \tag{3}$$

и при $y \geqslant 1$

$$\mathbf{P}\{|\xi_n(\lambda) - \mathbf{E}\xi_n(\lambda) - \eta_n(\lambda)| > \gamma y\} \leqslant n^{-y}, \tag{4}$$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{\frac{k\pi}{n}\leqslant\lambda\leqslant\frac{k+1}{n}\pi} \left|\xi_n(\lambda) - \xi_n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| > \gamma y\right\} \leqslant n^{-y}, \tag{5}$$

$$\mathbf{P}\left\{\max_{\frac{k\pi}{n}\leqslant\lambda\leqslant\frac{k+1}{n}\pi} \left|\eta_n(\lambda) - \eta_n\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right| > \gamma y\right\} \leqslant n^{-y}. \tag{6}$$

Неравенство (3) доказано в ([2]). Доказательство (4), (5) и (6) состоит в применении неравенства Бернштейна с использованием утверждения а) из леммы 1 и оценок

$$\mathbf{D}(\xi_n(\lambda) - \eta_n(\lambda)) \leqslant C_3 \|f\|_{L_p}^2 n^{-1+2/p} \ln(n+1),$$
$$\mathbf{D}(\xi_n(\lambda) - \xi_n(\mu)) \leqslant C_4 \|f\|_{L_p}^2 n^{1+2/p} (\lambda-\mu)^2,$$
$$\mathbf{D}(\eta_n(\lambda) - \eta_n(\mu)) \leqslant C_5 \|f\|_{L_p}^2 |\lambda-\mu|^{1-2/p}.$$

Следствие 2. *При* $y > 1$ $\mathbf{P}\{\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant\pi} |\eta_n(\lambda)| - \xi_n(\lambda)| > 4\gamma y\} \leqslant 3n^{1-y}$, *где* γ *из леммы* 3.

Теперь легко получить доказательство теоремы из следствий 1 и 2, и из неравенства $\dfrac{d}{da}\Phi_1(a) \leqslant C_6 e^{-a^2/2}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. И. А. Ибрагимову за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
23 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] U. Grenander, M. Rosenblatt, Statistical Analysis of Stationary Time Series, N. Y., 1957. [2] И. А. Ибрагимов, Теория вероятн. и ее применения, 8, в. 4, 391 (1963). [3] Т. Л. Малевич, Теория вероятн. и ее применения, 9, в. 2, 387 (1964).