Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 533.901 *ФИЗИКА*

Академик АН УССР А. И. АХИЕЗЕР, А. С. БАКАЙ

К ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ

1. Ферми принадлежит замечательная идея о возможности ускорения космических частиц в результате их столкновений со случайно движущимися объектами [1]. Анализ этого механизма ускорения на простейшей одномерной модели при помощи ЭВМ был предпринят Уламом [2], а затем детально проведен Т. М. Заславским и Б. В. Чириковым [3], выяснившим условия его применимости.

Для дальнейшего выяснения возможностей стохастического механизма ускорения Ферми представляется естественным рассмотреть более общий случай двух- и трехмерного движения частицы в ограниченном пространстве, когда частица испытывает нескоррелированные толчки на границе. Такая задача, в свою очередь, является частным случаем более общей задачи о многомерном движении динамической системы, испытывающей нерегулярные толчки на некоторой поверхности (или поверхности) в фазовом пространстве. Эти задачи рассматриваются в настоящей работе. Их решение приводит к выводу, что механизм стохастического ускорения может быть использован для нагрева плазмы, находящейся в замкнутой ловушке, если на границе ловушки (или внутри ее, в достаточно узкой пространственной области) действует интенсивное высокочастотное поле.

2. Рассмотрим сначала простейший случай движения частицы в круге. Будем считать, что в отсутствие внешних сил частица испытывает зеркальные отражения от границы:

$$p_r^{(n+1)} = -p_r^{(n)}, \quad p_t^{(n+1)} = p_t^{(n)}, \tag{1}$$

где $p_{r,t}$ — радиальная и тангенциальная составляющие импульса частицы и n — индекс, нумерующий столкновения. Последовательные моменты столкновений связаны между собой очевидным соотношением

$$t^{(n+1)} = t^{(n)} + \frac{2mR\cos\theta^{(n)}}{\sqrt{(p_r^{(n)})^2 + (p_t^{(n)})^2}}, \tag{2}$$

где R — радиус граничной окружности, m — масса частицы и

$$\theta^{(n)} = \operatorname{arc\,tg} |p_t^{(n)}/p_r^{(n)}|.$$

Пусть теперь на границе на частицу действует слабое переменное внешнее поле с частотой ω_0, приводящее к небольшим дополнительным изменениям импульса при отражениях:

$$\Delta p_r^{(n)} = \alpha\cos(\omega_0 t^{(n)} + \varphi_r), \quad \Delta p_t^{(n)} = \beta\cos(\omega_0 t^{(n)} + \varphi_t), \tag{3}$$

где α, β, φ_r, φ_t — некоторые постоянные, причем $\alpha \ll |p_r^{(0)}|$, $\beta \ll |p_t^{(0)}|$. При этом энергия так же испытывает изменения:

$$E^{(n+1)} = E^{(n)} + \frac{1}{2m}[(\Delta p_r^{(n)})^2 + (\Delta p_t^{(n)})^2 + 2\Delta p_r^{(n)} p_r^{(n)} + 2\Delta p_t^{(n)} p_t^{(n)}]. \tag{4}$$

Будем считать, что частота внешнего поля ω_0 значительно больше частоты столкновений частицы с границей, так что фаза $\varphi = \omega_0 t$ изменяется очень быстро и поэтому фазы двух последовательных столкновений нескоррелированы ([3]). При этом выражение (4) можно усреднить по фазе, в результате чего получим

$$\langle E^{(n+1)}\rangle = \langle E^{(n)}\rangle + \varepsilon, \quad \varepsilon = (\alpha^2+\beta^2)/(4m), \tag{5}$$

откуда

$$\langle E^{(n)}\rangle = \varepsilon n + E^{(0)}. \tag{6}$$

Чтобы найти закон изменения энергии во времени t, остается определить зависимость n от t. Из (3) имеем

$$\langle(\Delta p_t)^2\rangle / \langle(\Delta p_r)^2\rangle = \alpha^2/\beta^2,$$

поэтому при больших n, когда

$$n\langle(\Delta p_{r,\,t})^2\rangle / |p_{r,\,t}^{(0)}|^2 \gg 1,$$

величина $\theta^{(n)}$ практически не зависит от n:

$$\theta^{(n)} \approx \theta = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta). \tag{7}$$

Из (2), (6) и (7) получаем

$$\langle E(t)\rangle \approx \varepsilon (t/t_0)^2, \tag{8}$$

где

$$t_0 = 4mR\cos\theta/\sqrt{2m\varepsilon}.$$

Мы видим, что энергия частицы растет пропорционально квадрату, а не первой степени времени, как обычно при стохастическом ускорении. Это обусловлено тем, что частота столкновений растет вместе с энергией.

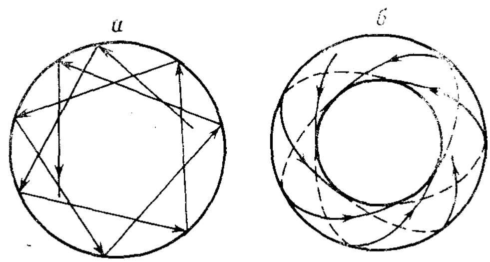

Рис. 1

Рост энергии частицы прекратится, очевидно, когда частота столкновений сравнится с частотой внешней силы ([3]). Поэтому предельная энергия частицы E_m определяется из соотношения

$$2\pi\omega_0 \approx R\cos\theta/\sqrt{2mE_m},$$

откуда

$$E_m \approx \frac{1}{2m\pi^2}(R\cos\theta m\omega_0)^2. \tag{9}$$

Время, в течение которого энергия достигает этого предельного значения, равно по порядку величины

$$t_m \approx t_0\sqrt{E_m/\varepsilon} = 2m\omega_0 R^2\cos^2\theta/(\pi\varepsilon). \tag{10}$$

3. Легко видеть, что движение частицы в круге является частным случаем многомерного движения динамической системы, возмущаемого на некоторых поверхностях в ее фазовом пространстве. В самом деле, фазовая траектория частицы в круге (рис. 1*а*) топологически эквивалентна фазовой траектории на двумерном торе (рис. 1*б*) и поэтому полученные результаты естественно обобщаются на случай N-мерной динамической системы, совершающей в отсутствие внешних сил квазипериодическое движение:

$$\dot I_k = 0, \quad \dot\theta_k = \omega_k(I), \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

где θ_k, I_k — угловые переменные и переменные действия.

Пусть такая система испытывает действие переменного поля на некоторой $(2N-1)$-мерной поверхности в фазовом пространстве, например на поверхности $\theta_1 = 2l\pi$, l — произвольное целое число. (Заметим, что все точки фазового пространства, в которых фазы θ_k различаются на $2l\pi$, эквивалентны, поэтому уравнение $\theta_1 = 2l\pi$ определяет одну поверхность.)

Уравнение движения динамической системы при действии возмущающей силы на поверхности $\theta_1 = 2l\pi$ можно представить в виде

$$\dot{I}_k = f_k(I,\ \theta,\ t)\,\delta(\theta_1 - 2l\pi), \quad \dot{\theta}_k = \omega_k(I), \tag{12}$$

где $f_k(I, \theta, t)$ — внешняя сила.

Рассмотрим простейший случай, когда $f_k(I, \theta, t) = f_k \cos(\omega_0 t + \varphi_k)$. В этом случае из (12) вытекает разностное уравнение

$$I_k^{(n+1)} = I_k^{(n)} + f_k \cos\psi_k^{(n)}, \qquad \psi_k^{(n)} = \omega_0 t^{(n)} + \varphi_k, \tag{13}$$

где, как и раньше, n — индекс, нумерующий число пересечений фазовой траектории с поверхностью $\theta_1 = 2l\pi$, и $t^{(n)}$ — момент n-го пересечения,

$$t^{(n+1)} = t^{(n)} + 2\pi / \omega_1(I^{(n)}). \tag{14}$$

Если $\omega_0 \gg \omega_1$, то вытекающие из (13) уравнения

$$(I_k^{(n+1)})^2 = (I_k^{(n)} + f_k \cos\psi_k^{(n)})^2$$

можно усреднить по фазам

$$\langle (I_k^{(n+1)})^2 \rangle = \langle (I_k^{(n)})^2 \rangle + {}^1/_2 f_k^2,$$

откуда

$$\langle (I_k^{(n)})^2 \rangle = (I_k^{(0)})^2 + {}^1/_2 n f_k^2. \tag{15}$$

Найдя из (14) зависимость n от t, можно получить выражение для $\langle (I_k)^2 \rangle$ как функцию t. Так, например, если

$$\omega_1(I) = \omega_1(I_1) = c_1 I_1,$$

то при больших значениях n

$$n \approx \frac{c_1^2 f_1^2}{32\pi^2}\, t^2$$

и, следовательно,

$$\langle I_k^2(t) \rangle \approx I_k^2(0) + \frac{c_1^2 f_1^2 f_k^2}{64\pi^2}\, t^2.$$

4. Покажем теперь, что полученные результаты могут быть положены в основу метода поверхностного высокочастотного нагрева плазмы в замкнутых ловушках.

Рассмотрим, например, ловушку с остроконечной геометрией, в которой частица упруго отражается от границы. Пусть на границе действует внешнее высокочастотное электрическое поле с амплитудой E_0. Приобретаемая частицей за одно столкновение средняя энергия равна, очевидно, $\varepsilon \approx eE_0\delta$, где δ — толщина скин-слоя. Нас интересует случай, когда ω_0 значительно больше частоты столкнновений с границей, поэтому скин-эффект является аномальным и δ определяется формулой ([4])

$$\delta = [c^2 v_{eT} / (\omega_{ep}^2 \omega_0)]^{1/3},$$

где v_{eT} — средняя тепловая скорость электронов, ω_{ep} — электронная плазменная частота.

Приведем численные оценки, считая, что размеры ловушки $R \sim 10^2$ см, плотность частицы плазмы $n_0 \sim 10$ см$^{-3}$, начальная тепловая скорость электронов $v_{eT}{}^0 \sim 10^{10}$ см/сек. Частота столкновений электронов с границей при этом будет $R / v_{eT} \sim 10^8$ сек$^{-1}$ и частоту ω_0 можно выбрать порядка $\sim 10^{10}$ сек$^{-1}$. В этом случае $\delta \approx 0{,}03$ см и для электронов $\varepsilon \approx 300$ эв. Из (9) и (10) находим предельную энергию электронов $E_m \approx 2 \cdot 10^6$ эв и время нагрева $t_m \approx 10^{-4}$ сек. Заметим, что это время значительно меньше времени ухода частиц из ловушки, которое при магнитном поле $H \sim 10^5$ гс составляет $10^{-3} - 10^{-2}$ сек.

Таким образом, мы видим, что этот метод позволяет быстро нагреть электроны плазмы в ловушке с упругим отражением от границы до высоких температур.

5. Стохастическое ускорение частиц плазмы может происходить не только на границе ловушки. Действительно, как показано в п. 4, оно должно иметь место, если частица, совершая финитное движение, проходит через локализованные в пространстве узкие области (будем называть их резонансными зонами), в которых на нее действует интенсивное высокочастотное поле. Частица будет ускоряться, если толщина резонансной зоны δ и частота прохождения частицей этой зоны удовлетворяют неравенствам

$$\bar{v} / \delta \gg \omega_0 \gg \nu \tag{16}$$

($\bar{v}$ — средняя скорость частицы).

Узкие резонансные зоны возникают в неоднородной плазме или в плазме, находящейся в неоднородном магнитном поле в тех местах, где частота ω_0 совпадает с одной из характерных частот — плазменной или циклотронной. В резонансной зоне амплитуда поля может быть достаточно большой, порядка $E_0\omega_0 / \gamma_0$, где E_0 — амплитуда падающей волны, γ_0 — ее коэффициент затухания. Если условие (16) выполнено, то при однократном прохождении резонансной зоны частица приобретает среднюю энергию $\varepsilon \sim \delta e E_0 \omega_0 / \gamma_0$. Максимальная энергия и время нагрева могут быть определены по прежним формулам (9), (10).

Таким образом, стохастическое ускорение может быть использовано также для нагрева плазмы в ловушках с неоднородной плотностью или неоднородным магнитным полем.

Авторы выражают признательность К. Н. Степанову и В. Ф. Алексину за ценные обсуждения.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
28 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Fermi, Phys. Rev., **75**, 1169 (1949). [2] C. Ulam, Proc. IV Berkley Symp. on Math. and Probabil., Berkley — Los-Angeles, **3**, 315 (1961); Сборн. пер. Математика, **7**, 137 (1963). [3] Т. М. Заславский, Б. В. Чириков, ДАН, **159**, 306 (1964). [4] В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, 1961.