Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.947 *МАТЕМАТИКА*

Ш. А. АХМЕДОВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 18 V 1971)

Рассмотрим уравнение
$$P(D)u = 0, \tag{1}$$
где $P(D)$ — произвольный линейный дифференциальный оператор в R^n с постоянными коэффициентами.

В данной статье мы рассматриваем задачу Коши для обобщенных решений уравнения (1) на нехарактеристическом подпространстве. Мы покажем, что такая задача корректно разрешима в классе обобщенных функций конечного порядка, если оператор $P(D)$ гиперболичен. Отметим, что задача Коши в классах обобщенных функций конечного порядка впервые была поставлена В. П. Паламодовым в [1].

Пусть ω — область в R^n. Через $\mathscr{D}(\omega)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций в R^n, носители которых суть компакты, принадлежащие области ω. Через $\mathscr{D}'(\omega)$ обозначим пространство обобщенных функций в области ω.

В работе [2], а также в [3] установлено, что все решения уравнения (1), принадлежащие пространству $\mathscr{D}'(\omega)$, слабо бесконечно дифференцируемы по нехарактеристическому переменному t, поэтому можно рассматривать задачу Коши для обобщенных функций с обобщенными начальными данными на гиперплоскости $t = 0$.

Выберем систему координат $\xi = (t, \xi')$ в R^n и обозначим через L гиперплоскость, заданную уравнением $t = 0$. Через $G(r)$ обозначим открытый $(n-1)$-мерный диск радиуса $r > 0$ с центром в начале координат, лежащий в L. Через $K^\delta(r)$, где $\delta > 0$, обозначим объединение двух открытых прямых конусов с общим основанием $G(r)$ и высотами, равными $\delta \cdot r$. Следующая теорема дает условия для разрешимости задачи Коши в классе обобщенных функций конечного порядка.

Теорема 1. *Пусть $P(D)$ — гиперболический по t оператор порядка m. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $r > 0$ и любых обобщенных функций $w_j \in \mathscr{D}'(G(r))$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, существует обобщенная функция $u \in \mathscr{D}'(K^\delta(r))$, являющаяся решением уравнения (1) в конусе $K^\delta(r)$ и удовлетворяющая условиям*
$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{G(r)} = w_j, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Эта теорема переносит классический результат И. Г. Петровского [4] на случай задачи с обобщенными начальными данными. В случае когда сам оператор $P(D)$ не гиперболичен, но гиперболична его главная часть, такая задача Коши корректно разрешима в некоторых классах обобщенных функций бесконечного порядка, которые мы сейчас укажем.

Пусть F — компакт в R^n. Для любых $\beta > 1$ и $B > 0$ через $\mathscr{D}_F^{\beta,B}$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций в R^n, носители которых принадлежат компакту F и для которых конечна норма
$$\|\varphi\|^{\beta,B} = \sup_j \frac{\max_\xi |D^j\varphi(\xi)|}{B^{|j|}\,|j|^{|j|\cdot\beta}}.$$

Пусть $(\mathscr{D}_F^{\beta,B})'$ — сопряженное пространство, норму в этом пространстве мы будем обозначать через $\|\cdot\|_B^F$. Рассмотрим класс основных функций $\mathscr{D}_F^{\beta} = \bigcap\limits_{B>0} \mathscr{D}_F^{\beta,B}$. Введем в нем счетное число норм: $\|\cdot\|^{\beta,B}$, $B = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots$

Через $\mathscr{D}^{\beta}(\omega)$ обозначим $\bigcup\limits_{F\subset\omega} \mathscr{D}_F^{\beta}$, где объединение берется по всем компактам $F \subset \omega$. Пространство линейных функционалов над пространством $\mathscr{D}^{\beta}(\omega)$, непрерывных на D_F^{β} для любого компакта $F \subset \omega$, обозначим через $U^{\beta}(\omega)$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — фиксированная система координат в R^n и $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n)$ — фиксированное разбиение переменных ξ на две группы. Через $R_{\xi'}$ и $R_{\xi''}$ обозначим соответствующие координатные подпространства в R^n, а через $z' = (z_1, \ldots, z_m)$ и $z'' = (z_{m+1}, \ldots \ldots, z_n)$ — соответствующие группы двойственных переменных.

Пусть ω' и ω'' — некоторые области соответственно в пространствах $R_{\xi'}$ и $R_{\xi''}$, а f — обобщенная функция, принадлежащая пространству $U^{\beta}(\omega)$, где $\omega = \omega' \times \omega'' \subset R^n$.

Каждой функции $\varphi'' \in \mathscr{D}^{\beta}(\omega'')$ мы можем поставить в соответствие обобщенную функцию $(f, \varphi'')_{\xi''} \subset U^{\beta}(\omega')$, действующую по формуле

$$((f, \varphi'')_{\xi''}, \varphi') = (f, \varphi' \cdot \varphi'') \qquad \forall \varphi' \in \mathscr{D}^{\beta}(\omega').$$

Нетрудно проверить, что функционал $(f, \varphi'')_{\xi''}$ непрерывен на $\mathscr{D}^{\beta}(\omega')$.

Определение. Пусть ω — область в R^n. Скажем, что функционал $f \in U^{\beta}(\omega)$ слабо бесконечно дифференцируем по ξ', если для любых областей ω' и ω'' таких, что $\omega' \times \omega'' \subset \omega$ и $\forall \varphi'' \in \mathscr{D}^{\beta}(\omega'')$, функционал $(f, \varphi'')_{\xi''}$ соответствует бесконечно дифференцируемой функции по ξ' и ω'.

Обозначим через N характеристическое множество оператора $P(D)$ в C^n.

Теорема 2. *Пусть на множестве N выполняется неравенство*

$$|z'| \leqslant B(|y'| + |z''| + 1)^{1/\gamma}, \quad B > 0, \quad \gamma > 0, \quad y' = \operatorname{Im} z'. \qquad (2)$$

Тогда всякое решение уравнения (1), *принадлежащее пространству $U^{\beta}(\omega)$, слабо бесконечно дифференцируемо по ξ' как элемент пространства $U^{\alpha}(\omega)$, где $\alpha = \min(\beta, \gamma\beta)$, при условии что $\alpha > 1$.*

Доказательство теоремы ([2]) основано на экспоненциальном представлении решений уравнения (1), полученном в ([1]).

Будем говорить, что оператор $P(D)$ слабо гиперболичен по переменной t, если $P_m(D)$ гиперболичен по t, где P_m — главная часть полинома P.

Если оператор $P(D)$ слабо гиперболичен по t, то при разбиении переменных ξ на группы $\xi' = t$, $\xi'' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ на его характеристическом множестве выполняется неравенство (2) с $\gamma = 1$. Так как в данном случае $\alpha = \beta$, все решения уравнения (1), принадлежащие пространству $U^{\beta}(\omega)$, слабо бесконечно дифференцируемы по нехарактеристическому переменному t. Поэтому можно рассматривать задачу Коши для обобщенных функций из класса $U^{\beta}(\omega)$ с начальными данными из аналогичного класса обобщенных функций, заданных на гиперплоскости $t = 0$. Прежде чем рассматривать указанную задачу Коши, нам необходимо установить, что для всякого слабо гиперболического оператора $P(D)$ существует фундаментальное решение, принадлежащее пространству $U^{\beta}(R^n)$, носитель которого содержится в подходящем конусе. Через $\Gamma(P)$ обозначим множество всех вещественных векторов θ таких, что полином $P_m(\theta + \tau\eta)$, где $\eta = (1, 0, \ldots, 0)$, имеет только отрицательные корни.

Теорема 3. *Пусть оператор $P(D)$ слабо гиперболичен по переменной t.*

Тогда у оператора $P(D)$ существует фундаментальное решение E, которое принадлежит пространству $U^{\beta}(\omega)$, $\beta = m/(m-1)$, а носитель

$\operatorname{supp} E$ *содержится в конусе*

$$\Gamma^*(P) = \{\xi;\ (\xi, \theta) > 0,\quad \theta \in \Gamma(P)\}.$$

Подобная теорема для гиперболического оператора имеется у Л. Хёрмандера ([5]).

Следующая теорема дает условия, при которых задача Коши корректно разрешима в классе $U^\beta(\omega)$.

Теорема 4. *Пусть $P(D)$ — слабо гиперболический по t оператор.*

Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $r > 0$, $\beta \in (1, m/(m-1)]$ и любых обобщенных функций $w_j \in U^\beta(G(r))$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, существует обобщенная функция $u \in U^\beta(K^\delta(r))$, являющаяся решением уравнения (1) в конусе $K^\delta(r)$ и удовлетворяющая условиям $\partial^j u / \partial t^j |_{G(r)} = w_j$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Доказательство этой теоремы использует теорему 3. Указанное в теоремах 1 и 4 решение единственно в силу теоремы 5.

Теорема 5. *Пусть ось t не является характеристическим направлением для оператора $P(D)$.*

Тогда для любых $r > 0$ и $\beta > 1$ любая обобщенная функция $u \in U^\beta(K^\delta(r))$, являющаяся решением уравнения (1) в конусе $K^\delta(r)$ и удовлетворяющая условиям $\partial^j u / \partial t^j |_{G(r)} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$, равна нулю в конусе $K^\delta(r)$.

В заключение выражаю благодарность В. П. Паламодову за помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
26 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Паламодов, Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, «Наука», 1967. [2] J. Garding, B. Malgrange, Math. Scand., 9, 5 (1961). [3] В. П. Паламодов, ДАН, 140, № 5, 1015 (1961). [4] И. Г. Петровский, Бюлл. Московск. унив., секция А, 1, в. 7 (1938). [5] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965.