Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 5

УДК 517.43 *МАТЕМАТИКА*

М. М. ГЕХТМАН

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЯДРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 25 V 1971)

I. В гильбертовом пространстве $L^2(0, \infty)$ рассмотрим самосопряженный оператор H, порожденный дифференциальным выражением

$$Lf(x) = (-1)^n \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} + q(x) f(x) \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$f^{(j)}(0) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Будем считать в дальнейшем, что функция $q(x)$ вещественна, бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, a]$ $(0 < a < \infty)$ и обращается в нуль при $x > a$, но $q(a) \neq 0$.

Обозначим через $W(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})|_{x=a}$ определитель Вронского системы функций $z_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2n)$, вычисленный в точке $x = a$, а через ω_j — корни степени $2n$ из единицы. Запись $W(z_1, \ldots, z_{k-1}, \hat{z}_k, z_{k+1}, \ldots, z_{2n})$ будет означать в дальнейшем, что в определителе Вронского отсутствует функция $z_k(x)$.

Как известно ([5]), вся комплексная плоскость λ может быть разбита на $4n$ секторов с вершиной в точке $\lambda = 0$ таким образом, что для каждого сектора T_l различные корни ω_k могут быть упорядочены так, что для всех $\lambda \in T_l$ $(l = 1, 2, \ldots, 4n)$

$$\operatorname{Re}(i\lambda\omega_0) \leqslant \operatorname{Re}(i\lambda\omega_1) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(i\lambda\omega_{2n-1}). \tag{3}$$

Пусть $\lambda = \sigma + i\tau$ — комплексное число, определим функции

$$y_k(x, \lambda) = e^{i\lambda\omega_k x} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Наряду с оператором H рассмотрим в пространстве $C(0, a)$ спектральную задачу H_0, которая определяется следующим способом:

$$Lf(x) = \lambda^{2n} f(x), \quad 0 < x < a, \tag{4}$$

$$W(f, y_1, \ldots, \hat{y}_j, \ldots, y_{2n})|_{x=a} = f^{(j-1)}(0) = 0. \tag{5}$$

В формуле (5) $j = 1, 2, \ldots, n$, причем предполагается, что функции $y_j(x, \lambda)$ занумерованы в том порядке, который определяется соотношением (3) для $\lambda \in T_0$.

II. Целью настоящей работы является установление связи между самосопряженной краевой задачей, определенной в гильбертовом пространстве $L^2(0, \infty)$ дифференциальным выражением (1) и граничными условиями (2), и спектральной задачей H_0. Для случая уравнения второго порядка аналогичная задача рассматривалась в работах ([1], [2], [3]), а для уравнения четвертого порядка эта задача была изучена в ([4]).

Теорема *. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Спектр задачи H_0 состоит из счетного множества собственных чисел λ_n, которые, кроме, быть может, конечного числа однократны.*

2) *Ядро резольвенты $R(x, t; \lambda)$ оператора H при фиксированных значениях $x \geqslant 0$ и $t \geqslant 0$, рассматриваемое как функция спектрального параметра λ, является мероморфной функцией, полосы которой совпадают с числами λ_n.*

3) *Пусть функции $f_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$ бесконечно дифференцируемы на отрезке $[0, a]$ и обращаются в нуль в точках $x = 0$ и $x = a$ вместе со всеми своими производными.*

Тогда эти функции допускают разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям $\varphi_n(x)$ задачи H_0 вида

$$f_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda_n^j \varphi_n(x) \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n-1) \tag{6}$$

Коэффициенты C_n в формуле (6) могут быть вычислены явно, если известны собственные функции спектральной задачи H_0.

4) *Разложение (5) единственно.*

III. Доказательство теоремы основывается на нескольких леммах.

Лемма 1. *Резольвента R_λ^0 спектральной задачи H_0 имеет вид*

$$R_\lambda^0 g(x) = \int_0^a R(x, t; \lambda)\, g(t)\, dt.$$

Лемма 1 доказывается непосредственно построением резольвенты спектральной задачи H_0.

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in T_l$ и ω_k удовлетворяют соотношениям (3).*

Тогда существуют $2n$ линейно независимых решений $\varphi_k(x, \lambda)$ уравнения (4), регулярных при достаточно большом $|\lambda|$, и таких, что при $j = 0, 1, \ldots, 2n-1$ равномерно по $0 \leqslant x \leqslant a$ выполнены равенства

$$\varphi_k^{(j)}(x, \lambda) = (i\lambda\omega_k)^j e^{i\lambda\omega_k x}\left[1 + \frac{i\omega_k \int\limits_x^a q(t)\, dt}{2n\lambda^{2n-1}} - \frac{(2n-2j-1)\, q(x)}{4n\lambda^{2n}} + O(|\lambda|^{-2n-1})\right] \tag{7}$$

Лемма 2 доказывается методом, впервые предложенным Биркгофом и Я. Д. Тамаркиным ([6]).

Сектор T_k на плоскости λ определяется посредством неравенства

$$\pi k/n \leqslant \arg \lambda \leqslant \pi k/n + \pi/(2n) \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1). \tag{8}$$

Введем еще секторы $\overline{T}_k$, которые получаются из секторов T_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$ путем зеркального отображения относительно вещественной оси в плоскости λ.

Лемма 3. *Собственные значения $\lambda_k = \sigma_k + i\tau_k$ спектральной задачи H_0 расположены в секторах T_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ и $\overline{T}_k$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$; причем, если $\lambda_k \in T_k$, то вне круга некоторого достаточно большого радиуса*

$$\lambda_k = \frac{\omega_k}{a}(\pi k + i n \ln|k| + O(1)),$$

если же $\lambda_k \in \overline{T}_k$, то

$$\lambda_k = \frac{\overline{\omega}_k}{a}(\pi k - i n \ln|k| + O(1)).$$

---

* Отметим, что утверждения теоремы остаются в силе при более слабых условиях на гладкость функций $q(x)$ и $f_j(x)$. Кроме того, можно ограничиться требованием обращения в нуль при $x = 0$ и $x = a$ конечного числа производных от функции $f_j(x)$.

Вне указанных секторов может быть разве что конечное число собственных значений. Кроме того, вне круга некоторого радиуса все собственные значения однократны.

Из лемм 1—3 вытекают два первых утверждения теоремы, для доказательства которых используются следующие леммы.

Лемма 4. *В комплексной плоскости $\lambda = \sigma + i\tau$ существует последовательность расширяющихся замкнутых контуров Γ_N, на которых ядро резольвенты $R^0(x, t, \lambda)$ равномерно по $0 \leqslant x \leqslant a$ и $0 \leqslant t \leqslant a$ допускает оценку*

$$|R^0(x, t, \lambda)| \leqslant C|\lambda|^{2n^2-2n+1}. \tag{9}$$

Лемма 5. *Пусть функция $g(x)$ бесконечно дифференцируема и в точках $x = 0$ и $x = a$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными.*

Тогда, каково бы ни было целое положительное число m, справедливо равенство

$$R_\lambda^0 g = R_\lambda^0 L^m g/\lambda^{2nm} - \sum_{r=1}^{m} (L^{r-1}g/\lambda^{2nr}). \tag{10}$$

Пусть функции $f_j(x)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$ удовлетворяют условиям 3 утверждения теоремы. Определим функции

$$\Phi_j(x, \lambda) = \lambda^j \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda^{2n-k-1} R_\lambda^0 f_k(x). \tag{11}$$

Используя лемму 5 (при $m = 1$), можно преобразовать формулу (11) к виду

$$\Phi_j(x, \lambda) = -\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f_k(x)}{\lambda^{k-j+1}} + \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{R_\lambda^0 L f_k(x)}{\lambda^{k-j+1}}. \tag{12}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_N} \Phi_j(x, \lambda)\, d\lambda, \tag{13}$$

где функция $\Phi_j(x, \lambda)$ определена по формуле (12), а Γ_N — последовательность расширяющихся контуров в комплексной плоскости λ, на которых ядро резольвенты R_λ^0 допускает оценку (9).

Переходя к пределу в формуле (13) и воспользовавшись леммой 5 при $m = n + 1$, в силу леммы 4 и формулы (12), получим равномерно по всем $x \in [0, a]$ равенство

$$\lim J_N = f_j(x) \quad (N \to \infty), \quad j = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{14}$$

С другой стороны, подставляя в формулу (13) вместо $\Phi_j(x, \lambda)$ выражение (11) и пользуясь теоремой о вычетах, получим равенство

$$\lim J_N = \sum_l \operatorname{Res}[\Phi_j(x, \lambda)]_{\lambda=\lambda_k} \quad (N \to \infty). \tag{15}$$

Сопоставив формулы (14) и (15), убеждаемся в справедливости разложений (6).

Можно показать, что существует система функций $\psi_n(x)$, биортогональных к собственным функциям спектральной задачи H_0. Поэтому разложения (6) единственны.

IV. Самосопряженность уравнения (1) влечет за собой совпадение биортогональной системы функций $\psi_n(x)$ с собственными функциями спектральной задачи H_0. Поэтому коэффициенты разложения (6) вычисляются явно, если только заданы собственные функции спектральной задачи H_0.

Если же отказаться от условия самосопряженности оператора L, то коэффициенты разложения (6) будут определяться еще и собственными функциями спектральной задачи, сопряженной к H_0. Все остальные утверждения теоремы остаются верными и в случае произвольного дифференциального оператора n-го порядка, коэффициенты которого финитны в одном и том же промежутке $[0, a]$.

В заключение автор пользуется случаем выразить признательность Б. Л. Когану за ценные советы и Б. М. Левитану за обсуждение полученных результатов.

Дагестанский государственный университет
им. В. И. Ленина
Махачкала

Поступило
20 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Regge, Nuovo Cimento, 8, 5, 671 (1958). [2] T. Regge, Nuovo Cimento, 9, 3, 491 (1958). [3] А. О. Кравицкий, ДАН, 170, № 6, 1255 (1966). [4] М. М. Гехтман, И. В. Станкевич, ДАН, 182, № 1, 23 (1968). [5] М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, М., 1954. [6] Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды, Петроград, 1917.